

Math. P.

569p

Math. P. 56. H.

Bretschneider

GRÜßEN / THEATER / OTTUMBERG

der Doppelstunden

Lehrstuhl für

Erziehung der Jugend

der Pädagogik

Erziehungs- und Unterrichtslehre

Wissenschaften

Verlag von J. Neumann, Neudamm
1875

Ueber
Curven vierter Ordnung
mit
drei Doppelpunkten.

~~~~~  
**Inaugural-Dissertation**

zur  
Erlangung der Doctorwürde

bei der philosophischen Facultät

der

**Friedrichs-Alexanders-Universität zu Erlangen**

eingereicht von

**Wilhelm Bretschneider.**

Stuttgart,

Druck von Carl Eberle,

1875







## Einleitung.

---

Das Thema zu der vorliegenden Arbeit ist den „vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie“ von O. Hesse entnommen.\*)

Hesse entwickelt dort in der ersten Vorlesung den analytischen Begriff der Homographie oder — nach der jetzt gebräuchlicheren Bezeichnungsweise — Projektivität zwischen den einförmigen Grundgebilden der Ebene in der Weise, dass er zu den beiden Gleichungen

$$U + \lambda U' = 0$$

$$V + \mu V' = 0,$$

welche die beiden auf einander zu beziehenden Gebilde darstellen, die allgemeinste lineo-lineare Gleichung  $f(\lambda, \mu) = 0$  zwischen ihren Parametern als dritte Gleichung hinzunimmt. Durch passende Wahl der Grundelemente lassen sich die Coefficienten dieser Gleichung so bestimmen, dass sie die Form  $\lambda - \mu = 0$  annimmt. Nach Einführung dieser kanonischen Form erhält er in der zweiten Vorlesung eine Erzeugungsweise der

---

\*) Hesse, „vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie.“  
Leipzig 1866.



Curven zweiter Ordnung und zweiter Klasse durch Elimination von  $\lambda$  zwischen den Gleichungen

$$U + \lambda U' = 0 \text{ und } V + \lambda V' = 0,$$

welche uns zwei projektivisch auf einander bezogene Grundgebilde der Ebene darstellen. Hierbei sind die Symbole  $U = 0$ ,  $U' = 0$  etc. für homogene lineare Funktionen von der Form  $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$  gesetzt, und wir haben Strahlbüschel vor uns, wenn wir die  $x$  als Variable betrachten, Punktreihen, wenn die  $u$  die Variabeln sind.

Diese Zuordnung und die dadurch bedingte Erzeugungsweise der Curven ist nun zunächst nach drei Seiten hin einer Erweiterung fähig. Einmal können wir an Stelle der linearen Funktionen  $U$  etc. Funktionen vom zweiten, dritten — allgemein  $n^{\text{ten}}$  Grade treten lassen, während die Form in  $\lambda$  linear bleibt. Das andere Mal können wir die Form in  $\lambda$  quadratisch etc. werden lassen, dagegen die als Coefficienten derselben auftretenden Funktionen in  $x$  resp.  $u$  linear nehmen. Drittens aber können beide Erweiterungen zu gleicher Zeit vorgenommen werden.

Die erste Erweiterung ist von Jonquières \*) zur Untersuchung der Curven  $n^{\text{ter}}$  Ordnung und speciell der Curven dritter und vierter Ordnung benutzt worden, und es hat sich diese Erzeugungsweise durch Curvenbüschel besonders nützlich erwiesen, wo es galt,

\*) *E. de Jonquières*, essai sur la génération des courbes géométriques. 1858.



Curven mit zum Voraus bestimmten Singularitäten zu erzeugen.

Die zweite Erweiterung wurde von Hesse zunächst für die in  $\lambda$  quadratische Form gegeben. Nachdem er nemlich in der zweiten Vorlesung l. c. gezeigt, dass die Punkte des durch zwei projektivische Strahlbüschel erzeugten Kegelschnitts durch die Gleichung

$$A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0$$

dargestellt werden, wo  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$  Punktgleichungen und  $\lambda$  ein Parameter sind, erweitert er in der dritten Vorlesung den Begriff der Projektivität dahin, dass er zwei solche Punktreihen auf Kegelschnitten projektivisch nennt, wenn sie gleiche Parameter haben: also wenn zu der obigen Gleichung eine ähnliche

$$A' + 2\lambda B' + \lambda^2 C' = 0$$

hinzutritt, wodurch jedem Punkt des einen Kegelschnitts immer nur *einer* des zweiten zugeordnet wird. Die Elimination von  $\lambda$  aus den beiden Gleichungen führt auf eine Curve vierter Ordnung, welche, wie auch die Curve  $2n^{\text{ter}}$  Ordnung im allgemeinen Falle, die Eigenschaft hat, dass ihre Coordinaten rational durch einen Parameter darstellbar sind, sie selbst also als vom Geschlecht  $p = 0$  das Maximum der Doppelpunkte besitzt.

Analytisch ist diese Darstellung projektivischer Punktreihen, deren Träger nicht die gerade Linie, sondern Kegelschnitte sind, zuerst von Hesse geleistet



worden; synthetisch finden wir sie aber schon früher bei *Seidewitz* \*) und *Schröter*.\*\*)

Schröter zeigt im zweiten Theile seines Aufsatzes über Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde, wie die Zuordnung der Punkte zweier Kegelschnitte, welche projektivisch aufeinander bezogen werden sollen, vermittelt wird durch einen Hilfskegelschnitt, der zu den beiden gegebenen hinzutritt. Er erhält dann durch Verbindung der entsprechenden Punkte eine Curve vierter Klasse, von der er zeigt, dass sie die erzeugenden Kegelschnitte je in vier Punkten berührt, drei Doppeltangenten hat und vom sechsten Grade ist. Ausserdem gibt er eine Construction der Doppeltangenten, indem er zeigt, dass zu jeder Curve nicht nur ein Hilfskegelschnitt, sondern eine zweifach unendliche Reihe von Kegelschnitten gehört, welche die Zuordnung vermitteln können, und welche die drei Doppeltangenten in gemeinsamen Tangenten haben.

Ich gebe im Folgenden zunächst eine Darstellung der beiden Erzeugungsweisen unserer Curven von Hesse und von Schröter (§. 1) und finde im §. 2, dass jeder Ordnungscurve eine bestimmte Klassencurve entspricht, deren Gleichung aufgestellt wird. Nachdem in §. 3 das von Schröter Gegebene analytisch ausgeführt wird, handeln §. 4 und §. 5 von dem Geschlecht

---

\*) *Seidewitz*, Darstellung der geometrischen Verwandtschaften etc. Grunert's Archiv Bd. 7.

\*\*) *Schröter*, Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde, Borchardt's Journal Bd. 54, p. 32.



der Curve und der Aufsuchung der Doppelpunkte, wobei der Zusammenhang der Ordnungscurve und ihrer entsprechenden Klassencurve darin zu Tage tritt, dass beide dasselbe Doppelpunkts- resp. Doppeltangentendreieck besitzen. In §. 6 wird dargethan, wie dieselbe Curve vierter Ordnung ausser den zwei gegebenen erzeugenden Kegelschnitten noch ein ganzes System von Kegelschnitten besitzt, aus welchem beliebige zwei zur Erzeugung der Curve herausgegriffen werden können. Alle berühren die Curve je in vier Punkten.

§. 7 endlich sucht darzuthun, dass jede Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten auf die zu Anfang gegebene Art erzeugt werden kann und gibt ein Verfahren an, das System der erzeugenden Kegelschnitte und damit der erzeugenden Tangentensysteme zu finden.

Von §. 8 an folgen einige Anwendungen des seither Gefundenen auf die Curven vierter Ordnung der metrischen Geometrie — Lemniscate und Kreisconchoide. Dabei werden im Hinblick auf letztere Curve allgemein diejenigen Specialisirungen der Zuordnung betrachtet, welche Spitzen bei der Curve zur Folge haben und weiterhin gezeigt, wie diese metrischen Curven in einfachster Weise in die Reihe der durch projektivische Betrachtung gewonnenen Curven sich einfügen. Für beide resultiren einige vielleicht neue Sätze, die sich den von Hippauf\*) und

---

\*) Dr. *H. Hippauf*, Lösung des Problems der Trisection mittelst der Conchoide auf circularer Basis. 1872.



Sidler \*) über die Kreisconchoide gefundenen anschliessen.

Bei der Ausführung der vorliegenden Arbeit habe ich mich der Leitung des Herrn Professors F. Klein zu erfreuen gehabt, dem ich hier, auch für die sonstige rege Förderung meiner Studien, meinen tiefgefühlten Dank ausspreche.

---

\*) Dr. G. Sidler, Trisektion eines Kreisbogens und die Kreisconchoide. Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. 1873.



§. 1.

**Erzeugung der Curven.**

1) Nach HESSE.

Unter  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ , seien im Folgenden lineare Gleichungen verstanden, welche wir uns entweder homogen in Punktcoordinaten, also von der Form

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$$

denken, oder homogen in Liniencoordinaten, also von der Form

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 = 0.$$

Ist ferner  $\lambda$  ein von  $-\infty$  bis  $+\infty$  laufender Parameter, dann ist nach Hesse l. c.

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$$

die Gleichung einer beliebigen Tangente, bez. eines beliebigen Punkts des durch die Gleichung

$$AC - B^2 = 0$$

dargestellten Kegelschnittes. Dieser ist das eine Mal als Ordnungcurve zu betrachten und wird von den Geraden  $A = 0$   $C = 0$  in den Schnittpunkten der-



selben mit  $B = 0$  berührt, d. h. der Schnittpunkt von  $A = 0$  und  $C = 0$  ist Pol der Geraden  $B = 0$ . Das andere Mal, als Klassencurve, geht er durch  $A = 0$ ,  $C = 0$  hindurch und  $B = 0$  ist Pol ihrer Verbindungsline. Wir erhalten somit bei beiden Interpretationen ein einfach unendliches Gebilde — binäres Werthgebiet —, dessen Träger der Kegelschnitt

$$AC - B^2 = 0$$

ist.

Nehmen wir nun zu der Gleichung

$$A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0$$

noch die zweite analog gebildete Gleichung

$$A' + 2\mu B' + \mu^2 C' = 0$$

hinzu, so haben wir damit zwei Gebilde der Ebene vor uns, welche sich von den sonst in der Ebene betrachteten einförmigen Grundgebilden «Punktreihe, resp. Strahlbüschel» nur dadurch unterscheiden, dass an die Stelle von «gerader Linie resp. Punkt» als Träger der Parameterwerthe ein Kegelschnitt als Klassen- resp. Ordnungscurve getreten ist. Somit können wir beide Gebilde projectivisch aufeinander beziehen, indem wir zwischen ihren Parametern  $\lambda$  und  $\mu$  die allgemeine lineare Gleichung

$$f(\lambda, \mu) = 0$$

annehmen. Dann entspricht jedem Werthe von  $\lambda$  ein ganz bestimmter von  $\mu$ , d. h.:

Jedem Element des einen Gebildes ist ein ganz be-



stimmtes im zweiten Gebilde zugeordnet; und zwar können wir diese Zuordnung auch in der Weise festlegen, dass wir dreien beliebigen Elementen des einen drei beliebige des andern zuordnen — jedes vierte Paar ist dann vollkommen bestimmt. Denn seien die drei Elemente des ersten Gebildes gegeben durch ihre Parameterwerthe

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3,$$

die drei entsprechenden des zweiten Gebildes beziehungsweise durch

$$\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3,$$

so erhalten wir für jedes vierte Element des ersten Gebildes, das dem Parameterwerthe  $\lambda$  entspricht, den Parameterwerth  $\mu$  des ihm entsprechenden im zweiten Gebilde aus der Gleichung:

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot \frac{\lambda - \lambda_3}{\lambda - \lambda_1} = \frac{\mu - \mu_3}{\mu - \mu_1} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_3},$$

indem wir bemerken, dass das Doppelverhältniss zwischen den 4 sich entsprechenden Strahlen resp. Punkten im einen und im andern Gebilde dasselbe sein muss.

Für den speciellen Fall, dass

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \infty, \lambda_3 = 0$$

ist, geht diese Gleichung in

$$\lambda = \frac{\mu - \mu_3}{\mu - \mu_1} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_3}$$



über und gestattet in dieser Form eine leichte Bestimmung von  $\mu$ .

Ist nun auf diese Weise die Zuordnung festgelegt, so können wir die Frage aufwerfen nach den Oertern, welche wir aus diesen Gleichungen 1) und 2) erhalten, wenn wir zwischen ihnen und der Gleichung 3) die Parameterwerthe  $\lambda$  und  $\mu$  eliminiren. Dabei erhalten wir dreierlei Möglichkeiten je nach der Interpretation der Ausdrücke  $A, B, C, A', B', C'$ .

Entweder eliminiren wir zwischen den Tangentensystemen — d. h. wir interpretiren  $A = 0, B = 0$  etc. als Liniengleichungen — und erhalten eine Curve vierter Ordnung.

Oder wir nehmen  $A = 0$  etc. als Punktgleichungen und erhalten eine Curve vierter Klasse.

Oder endlich wir nehmen das eine Gebilde als Tangentensystem, das andere als Punktsystem, wodurch wir zu einer Gleichung geführt werden, welche sowohl Linien- als Punktcoordinaten enthält und zwar beide vom zweiten Grade — Connex zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

Ich beschränke mich hier darauf, den ersten und zweiten Fall und die dabei resultirenden Curven zu untersuchen.

Um zunächst die Elimination einfacher ausführen zu können, bemerken wir, dass die beiden Gleichungen

$$A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0$$

und



$$A' + 2\mu B' + \mu^2 C' = 0$$

durch die allgemeinste lineare Transformation in ihrer Bedeutung ungeändert bleiben, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man z. B. die erste Gleichung mit Hilfe der Substitution

$$\lambda = \frac{\alpha\nu + \beta}{\alpha'\nu + \beta'}$$

transformirt. Es kommt das Gebilde

$$\{\beta'^2 A + 2\beta\beta' B + \beta^2 C\} + 2\nu \{\alpha'\beta' A + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) B + \alpha\beta C\} \\ + \nu^2 \{\alpha' A + 2\alpha\alpha' B + \alpha^2 C\} = 0,$$

als dessen Träger bei der Ausrechnung wieder der Kegelschnitt  $AC - B^2 = 0$  erscheint. Dies setzt uns in den Stand, die Zuordnung durch passende Wahl der Elemente so zu treffen, dass  $f(\lambda, \mu) = 0$  übergeht in

$$\lambda - \mu = 0,$$

was zur Folge hat, dass wir unsere Curven einfach durch Elimination von  $\lambda$  aus den beiden Gleichungen

$$A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0$$

$$A' + 2\lambda B' + \lambda^2 C' = 0$$

nach bekannter Methode in Determinantenform erhalten. Es lautet also ihre Gleichung:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ A' & B' & C' & 0 \\ 0 & A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0,$$

wie sie von Hesse l. c. angegeben ist. Sie giebt uns, je nach der Interpretation die Ordnungs- oder Klassen-



curve. Nehmen wir  $A = 0$  etc. als Liniengleichungen, und ordnen wir die Gleichungen, aus welchen die Determinante erhalten wurde, nach den  $x$ , so finden wir für die Coordinaten eines Punktes der Ordnungcurve, wenn  $\varrho$  einen willkürlichen Factor bezeichnet, die Werthe:

$$\begin{aligned}\varrho x_1 &= a_1 + b_1 \lambda + c_1 \lambda^2 + d_1 \lambda^3 + e_1 \lambda^4 \\ \varrho x_2 &= a_2 + b_2 \lambda + c_2 \lambda^2 + d_2 \lambda^3 + e_2 \lambda^4 \\ \varrho x_3 &= a_3 + b_3 \lambda + c_3 \lambda^2 + d_3 \lambda^3 + e_3 \lambda^4\end{aligned}$$

wo  $a_1, a_2$  etc. Functionen der Coefficienten  $A_1$  etc. sind. Machen wir endlich die rechten Seiten homogen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\varrho x_1 &= f_1(\lambda, \mu) \\ \varrho x_2 &= f_2(\lambda, \mu) \\ \varrho x_3 &= f_3(\lambda, \mu),\end{aligned}$$

wo  $f_1, f_2, f_3$  ganze rationale Functionen vom vierten Grade in  $\lambda, \mu$  sind. Setzen wir diese Coordinaten in die Punktgleichung  $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$  ein, so erhalten wir als Gleichung eines beliebigen Punktes unserer Curve vierter Ordnung:

$$F(\lambda, \mu) = 0$$

eine Gleichung vierten Grads in  $\lambda$  und  $\mu$ . Die Coefficienten der einzelnen Potenzen von  $\lambda$  und  $\mu$  einzeln gleich Null gesetzt repräsentieren uns fünf Punkte, was uns den Satz gibt:

„Wenn man die Gleichungen von irgend fünf Punkten multipliciert resp. mit der ersten, zweiten, dritten und vierten Potenz eines Parameters  $\lambda$ , so er-



hält man die Gleichungen der Punkte einer und derselben Curve vierter Ordnung.“

Ueberblicken wir die bei dieser Construction der Curve erhaltene Anzahl von Constanten, so finden wir, dass die zwei Kegelschnitte je 5, die Zuordnung 3, beide zusammen also 13 liefern. Wir werden aber weiter unten sehen, dass diese Zahl auf 11 heruntergeht, wie auch schon aus der zuletzt angegebenen Erzeugung durch fünf Punkte ersichtlich ist. Von diesen fünf Punkten liegen nemlich immer je zwei auf der Curve vierter Ordnung, während zwei andere auf den in den ersteren an die Curve gezogenen Tangenten liegen und zwar so, dass wenn der eine festgelegt ist, der andere und zugleich auch der fünfte Punkt daraus sich bestimmt. Die fünf Punkte liefern uns aber in der obigen Verbindung  $15 - 1 = 14$  Constante. Die Beschränkung der Variabilität der zwei auf der Curve selbst gelegenen absorhirt zwei und die Variabilität des dritten auf einer Tangente in jenen gelegenen noch eine Constante, so dass unsere Curve auf diese Weise in der That nur von 11 Constanten abhängig erscheint, was in §. 4 näher betrachtet werden wird.

## 2) Nach SCHRÖTER.

Ausser dieser algebraischen Herleitung unserer Curven lässt sich die von Schröter l. c. gegebene Erzeugungsweise (für die Ordnungcurve durchgeführt) durch folgende Betrachtung gewinnen.



Wie in §. 1 gezeigt, ordnet die lineare Gleichung  $f(\lambda, \mu) = 0$  die Tangenten des einen erzeugenden Kegelschnitts denen des andern in der Art zu, dass nach getroffener Wahl von drei, im Allgemeinen ganz beliebigen, Paaren entsprechender Tangenten, der Parameterwerth für jedes vierte Paar aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse sich ergibt. Da nun aber bekanntermassen das Doppelverhältniss zwischen vier Tangenten eines Kegelschnitts sich auf das Doppelverhältniss derjenigen vier Punkte überträgt, in welchen jene Tangenten von einer beliebigen fünften Tangente desselben Kegelschnitts geschnitten werden, so ist die Auffindung zugeordneter Tangenten zurückgeführt auf die bekannte Aufgabe: die zugeordneten Punkte zweier projectivischen Punktreihen zu finden, von welchen drei Paare zugeordneter Punkte gegeben sind.

Um also eine aus Tangentensystemen resultirende Curve vierter Ordnung zu zeichnen, haben wir folgendermassen zu verfahren:

K und K' (siehe Figur 1) seien die Träger der beiden Tangentensysteme und es mögen den Tangenten  $a_1, a_2, a_3$  auf K die Tangenten  $a'_1, a'_2, a'_3$  auf K' entsprechen. Wir bringen sie zum Schnitt mit je einer beliebigen Tangente L und L' desselben Systems und erhalten auf diesen die sich entsprechenden Punktpaare 1, 1'; 2, 2'; 3, 3'. Um zu der von einem beliebigen Punkt 4 der Geraden L ausgehenden Tangente  $a_1$ , des Kegelschnitts K die entsprechende von 4' ausgehende an den Kegelschnitt K' zu finden, verbinden wir nach bekannter Con-



struction\*) 1 mit 2', 2 mit 1' und erhalten den Schnittpunkt p. Ebenso kommt ein Punkt q als Schnittpunkt von 1 — 3' und 1' — 3. Die Verbindungslinie von 4 — 3' schneidet die Linie pq in v und 3 — v gezogen trifft die L' in dem gesuchten Punkt 4', von welchem aus an K' nur die eine entsprechende Tangente  $a'_4$  gezogen werden kann. Bringen wir alle auf diese Weise gefundenen, sich entsprechenden Tangenten zum Schnitt, so erhalten wir die Punkte unserer Curve.

Hiebei sehen wir nun auf L und L' zwei projectivische Punktreihen auftreten: die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen einen Kegelschnitt. Jede Tangente desselben vermittelt zwei entsprechende Punkte der Punktreihen, also auch zwei entsprechende Tangenten unserer Systeme; und wenn nun zu unseren beiden erzeugenden Kegelschnitten dieser Kegelschnitt, wir nennen ihn K'', als dritter gezeichnet hinzutreten würde, wäre die Zuordnung der Tangenten ebenfalls festgelegt. Jedes Paar entsprechender Tangenten wird dann so gefunden:

Man ziehe an K'' und K und ebenso an K'' und K' gemeinschaftliche Tangenten L und L', schneide sie mit einer beliebigen Tangente von K'' in 4 und 4', so sind die von 4 und 4' an K resp. K' noch möglichen Tangenten entsprechende, ihr Schnittpunkt ein Punkt der Curve vierter Ordnung. Dies ist aber die von

---

\*) Z. B. Reye, Geometrie der Lage p. 70.



Schröter l. c. angegebene Erzeugungsweise und wir nennen fortan den Kegelschnitt  $K''$  den «**Schröter'schen Hilfskegelschnitt**».

Zugleich bemerken wir, dass zufolge der Variabilität von  $L$  und  $L'$  für jede Curve noch zweifach unendlich viele solcher Hilfskegelschnitte resultiren, welche zur Erzeugung derselben Curve aus denselben zwei Kegelschnitten, als Träger von Tangentensystemen aufgefasst, dienen. Zählen wir die bei dieser Construction auftretenden Constanten ab, so finden wir 15, welche Zahl sich aber durch die letzte Bemerkung sofort auf 13 vermindert und, wie schon angedeutet, auf 11 heruntergehen muss.

Wir werden weiterhin von diesem zweifach unendlichen System von Hilfskegelschnitten Gebrauch machen und desshalb dasselbe weiter unten algebraisch herleiten. Zur Construction unserer Curven ist Schröter's Verfahren jedoch nur dann das einfachere, wenn man überhaupt Curven unserer Art erzeugen will. Kommt es aber darauf an, specielle Curven, etwa durch Auszeichnung bestimmter Tangentenpaare zu erzeugen, so ist es einfacher unsere erstere, der analytischen Darstellung nachgebildete, Erzeugungsweise zu gebrauchen, wie z. B. bei Figur 1, während Fig. 2 nach dem Schröter'schen Verfahren mit Zugrundelegung von 3 in der Ebene gezeichneten Kegelschnitten hergestellt ist und durch Wahl von Ellipsen in der gegebenen Anordnung die Curve mit drei reellen Doppelpunkten erscheinen lässt.



Endlich bemerken wir noch zu der letzteren Construction, dass bei Zuziehung eines Hilfskegelschnitts eigentlich 16 Curven entstehen, da wir aus den acht Tangenten, die er mit den erzeugenden Kegelschnitten gemein hat, 16 Combinationen  $L_1 L_2$  herstellen können, welche zum Ziele führen.

## §. 2.

### **Jeder Curve vierter Ordnung entspricht eine Curve vierter Klasse; analytische Darstellung beider.**

Wir haben gesehen, wie die Curve vierter Ordnung erhalten wird als Ort der Schnittpunkte entsprechender Tangenten zweier in der angegebenen Weise auf einander bezogenen Tangentensysteme, deren Träger Kegelschnitte sind; und es leuchtet ein, dass dies alles sich dualistisch auf die Erzeugung von Curven vierter Klasse übertragen lässt. Nun wissen wir, dass das System der Tangenten an einem Kegelschnitte projectivisch ist mit dem Systeme der Berührungspunkte der Tangenten. Es ist daher ein Zusammenhang zwischen der durch die Tangentensysteme erzeugten Curve vierter Ordnung und der durch die Systeme der Berührungspunkte erzeugten Curve vierter Klasse voraus-  
zusehen. Um die Untersuchung derselben vorzubereiten, geben wir hier die analytische Darstellung der genannten Klassencurve, die wir fortan „die der Curve



vierter Ordnung entsprechende Klassencurve“ nennen.

Ist nemlich

$$A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0$$

die Gleichung des einen Tangentensystems, welches zur Erzeugung der Curve vierter Ordnung dient, so sind die Coordinaten der variablen Tangente, wenn wir vorher homogen machen:

$$\sigma u_1 = f_1(\lambda, \mu) = A_1 \mu^2 + 2B_1 \lambda \mu + C_1 \lambda^2$$

$$\sigma u_2 = f_2(\lambda, \mu) = A_2 \mu^2 + 2B_2 \lambda \mu + C_2 \lambda^2$$

$$\sigma u_3 = f_3(\lambda, \mu) = A_3 \mu^2 + 2B_3 \lambda \mu + C_3 \lambda^2.$$

Somit die Coordinaten ihres Berührungspunktes, wie bekannt:

$$\rho x_1 = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial \mu} - \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mu}$$

$$\rho x_2 = \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mu} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial \mu}$$

$$\rho x_3 = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mu} - \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mu},$$

was ausgeführt folgende Werthe ergiebt, wenn wir

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \text{ setzen:}$$

$$\rho x_i = \mu^2 \frac{\partial \Delta}{\partial C_i} + 2\lambda \mu \frac{\partial \Delta}{\partial B_i} + \lambda^2 \frac{\partial \Delta}{\partial A_i}.$$

$$(i = 1, 2, 3.)$$



Um die Gleichung des variablen Berührungspunktes zu finden, setzen wir seine Coordinaten in die Punktgleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

ein, ordnen nach Potenzen von  $\lambda$  und  $\mu$  und finden

$$\mu^2 \alpha + 2\lambda\mu\beta + \lambda^2 \gamma = 0$$

wo

$$\alpha = (BCu), \beta = (CAu), \gamma = (ABu)$$

ist, wenn wir unter  $(ABu)$  z. B. den Ausdruck

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

verstehen.

Entsprechend dieser Gleichung erhalten wir für das System der Berührungspunkte des andern erzeugenden Kegelschnitts

$$\mu^2 \alpha' + 2\lambda\mu\beta' + \lambda^2 \gamma' = 0,$$

wo wieder

$$\alpha' = (B'C'u), \beta' = (C'A'u), \gamma' = (A'B'u)$$

ist.

Die Gleichung der Curve, welche von den Verbindungslinien entsprechender Berührungspunkte der Tangenten umhüllt wird, folgt aus diesen beiden Gleichungen durch Elimination von  $\lambda$  und  $\mu$  in der Form:



$$0 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 \\ 0 & \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix};$$

und die Curve wird synthetisch erzeugt durch eines der in §. 2 gegebenen Verfahren.

Dualistisch umgekehrt erhalten wir eine Ordnungscurve, die einer gegebenen Klassencurve entspricht, wozu wir nur in den gegebenen Ableitungen statt der  $u$  die  $x$  einzusetzen brauchen.

Der Zusammenhang dieser Ordnungs- und ihrer entsprechenden Klassencurve wird, wie gezeigt werden soll, vermittelt durch die Schröter'schen Hilfskegelschnitte, die bei jeder Curve, wie oben schon bemerkt, in zweifach unendlicher Zahl auftreten. Es mögen daher zunächst diese Hilfskegelschnitte analytisch hergeleitet werden.

### §. 3.

## Analytische Darstellung der Schröter'schen Hilfskegelschnitte.

Im Anschluss an die geometrische Erzeugungsweise der Hilfskegelschnitte in §. 1 ist die analytische Darstellung etwa wie folgt, zu leisten.



Wir nehmen auf dem Kegelschnitte K eine beliebige Tangente fest — ihr Parameterwerth sei  $\lambda = \lambda_0$ , also ihre Gleichung:

$$A + 2B\lambda_0 + C\lambda_0^2 = 0$$

und schneiden sie mit dem Tangentensysteme:

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0,$$

wobei wir die Gleichung der entstehenden Punktreihe in der Form

$$\Delta = 0 \text{ erhalten, wo } \Delta \text{ die Determinante}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 + 2B_1\lambda + C_1\lambda^2 & A_2 + 2B_2\lambda + C_2\lambda^2 & A_3 + 2B_3\lambda_0 + C_3\lambda_0^2 \\ A_1 + 2B_1\lambda_0 + C_1\lambda_0^2 & A_2 + 2B_2\lambda_0 + C_2\lambda_0^2 & A_3 + 2B_3\lambda_0 + C_3\lambda_0^2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

ist. Durch Subtraction der zweiten Zeile von der ersten und dann durch Subtraction der mit  $\lambda_0$  multiplicirten ersten Zeile von der zweiten geht diese Gleichung über in

$$\begin{vmatrix} 2B_1 + C_1(\lambda + \lambda_0) & 2B_2 + C_2(\lambda + \lambda_0) & 2B_3 + C_3(\lambda + \lambda_0) \\ A_1 + C_1(-\lambda\lambda_0) & A_2 + C_2(-\lambda\lambda_0) & A_3 + C_3(-\lambda\lambda_0) \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0,$$

was wir auch gemäss der oben erläuterten Bezeichnung folgendermassen schreiben können:

$$0 = 2(ABu) + (\lambda + \lambda_0)(ACu) + 2\lambda_0\lambda(BCu).$$

Schneiden wir ebenso das zweite Tangentensystem, dessen Träger der Kegelschnitt  $K'$  ist, mit einer dem Parameterwerthe  $\lambda = \lambda'_0$  entsprechenden



Tangente, so erhalten wir auf dieselbe Weise für die entsprechende Punktreihe die Gleichung

$$0 = 2(A'B'u) + (\lambda + \lambda'_0) (A'C'u) + 2\lambda'_0\lambda (B'C'u),$$

und den durch die beiden Punktreihen erzeugten Hilfskegelschnitt durch Elimination von  $\lambda$  aus beiden Gleichungen in der Form:

$$(2\gamma + \lambda_0\beta) (\beta' + 2\lambda'_0\alpha') - (2\gamma' + \lambda'_0\beta') (\beta + 2\lambda_0\alpha) = 0$$

oder ausgerechnet:

$$2 (\beta'\gamma - \gamma'\beta) + \lambda_0(\beta\beta' - 4\alpha\gamma') - \lambda'_0(\beta\beta' - 4\alpha'\gamma) + 2\lambda_0\lambda'_0 (\alpha'\beta - \alpha\beta') = 0.$$

Wir sehen, dass in Folge der Variabilität von  $\lambda_0$  und  $\lambda'_0$  eine und dieselbe Curve vierter Ordnung in der That ein zweifach unendliches System von Hilfskegelschnitten zulässt.

Für unsere weiteren Untersuchungen erweist sich nun als besonders wichtig die einfach unendliche Reihe derjenigen Hilfskegelschnitte, welche wir aus unserem System dadurch herausheben können, dass wir  $\lambda'_0 = \lambda_0$  setzen. Es sind dies diejenigen Kegelschnitte, welche wir erhalten, wenn wir zu Trägern der sie erzeugenden Punktreihen sich entsprechende Tangenten nehmen. Die letztere Gleichung geht denn über in:

$$\begin{aligned} & \{(C'A'u) (BAu) - (CAu) (B'A'u)\} \\ & + 2\lambda_0 \{(B'C'u) (BAu) - (BCu) (B'A'u)\} \\ & + \lambda_0^2 \{(B'C'u) (CAu) - (BCu) (C'A'u)\} = 0. \end{aligned}$$

Hieraus sehen wir, dass die einfach unendliche Reihe derjenigen Hilfskegelschnitte, welche durch ent-



sprechende Tangenten vermittelt werden, sich aus den dreien

$$(B'A'u) (BAu) - (CAu) (B'A'u) = 0 = A$$

$$(B'C'u) (BAu) - (BCu) (B'A'u) = 0 = B$$

$$(B'C'u) (CAu) - (BCu) (C'A'u) = 0 = C$$

zusammensetzen. Wir sehen aber, dass der Kegelschnitt  $B = 0$  mit den beiden andern dieselben drei Tangenten gemein hat, denn seine Gleichung folgt durch einfache Umformung aus den beiden andern. Wir kommen somit zu dem Satze:

Alle Hilfskegelschnitte von Schröter, welche durch entsprechende Tangenten vermittelt werden, haben dieselben drei Tangenten gemein.

Für die unserer Curve vierter Ordnung entsprechende Klassencurve erhalten wir die Reihe dieser so ausgezeichneten Hilfskegelschnitte auf ganz dieselbe, nur dualistisch umgekehrte Weise. Die Ausrechnung, welche mit Hilfe der Determinanten auf gleiche Weise zu führen ist, wie oben, ergibt als Gleichung des Systems der Hilfskegelschnitte, welche zu der unserer Curve vierter Ordnung entsprechenden Klassencurve

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 \\ 0 & \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

gehören, die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} A & B' \\ B & B' \end{vmatrix} + 2\lambda \begin{vmatrix} B & B' \\ C & C' \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} C & C' \\ A & A' \end{vmatrix}.$$



Auch diese Reihe setzt sich aus den drei Curven:

$$A = \begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix} = 0$$

$$B = \begin{vmatrix} B & B' \\ C & C' \end{vmatrix} = 0$$

$$C = \begin{vmatrix} C & C' \\ A & A' \end{vmatrix} = 0$$

mit Hilfe eines Parameters zusammen und letztere haben dieselben 3 Punkte gemein, da  $B = 0$  durch einfache Umformung aus den beiden andern hervorgeht. Damit haben wir den zu den folgenden Untersuchungen unserer Curve vierter Ordnung und ihrer entsprechenden Klassencurve nöthigen analytischen Apparat gewonnen und gehen zunächst zur Betrachtung der Ordnungscurve über.

---

#### §. 4.

### Geschlecht der Curve.

#### Doppelpunkte.

Wie wir §. 1 gesehen haben, sind die Coordinaten unserer Curve rational durch einen Parameter dargestellt. Dieselbe ist also nach Salmon und Clebsch\*)

---

\*) Salmon, A treatise on the higher plane curves p. 28.

Clebsch, über Curven, deren Coordinaten rationale Funktionen eines Parameters sind. Crelle, Bd. 64.



vom Geschlecht  $p = 0$  und besitzt somit das Maximum der Doppelpunkte

$$\frac{(n - 1) \cdot (n - 2)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3.$$

Es soll unsere nächste Aufgabe sein, diese Doppelpunkte zu bestimmen. Drei Wege führen zum Ziel. Der erste für Curven, deren Coordinaten rationale Funktionen eines Parameters sind, von Clebsch l. c. angegebene führt in unserem Falle auf sehr weitläufige Ausdrücke, welche mir noch nicht gelungen ist, in einfacher Weise auseinander zu legen. Ich hielt mich an den bei Aufsuchung von Doppelpunkten einer Curve gewöhnlich einzuschlagenden Weg der Differentiation der Curvengleichung und den von Schröter angegebenen, jedoch nur für dieses specielle Problem giltigen Weg, die Doppelpunkte mittelst der Hilfskegelschnitte zu finden. Letzterer ist der dabei auftretenden Beziehungen wegen analytisch durchgeführt.

Durch Differentiation der Curvengleichung nun erhalten wir, wenn wir

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ A' & B' & C' & 0 \\ 0 & A & B & C \\ 0 & A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0$$

setzen, die drei Gleichungen

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} = 0,$$



welche offenbar durch folgendes System von Gleichungen befriedigt werden:

$$\begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B & B' \\ C & C' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} C & C' \\ A & A' \end{vmatrix} = 0.$$

Dies sind aber drei Kegelschnitte, welche drei feste Punkte gemein haben; somit erhalten wir mit Beziehung auf §. 3 a. E. den Satz:

Die Doppelpunkte unserer Curve vierter Ordnung sind die gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der drei Kegelschnitte (vergl. p. 18):

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Diese drei Kegelschnitte bestimmen ein Netz, und die Jacobi'sche Curve desselben gibt mit ihren Doppelpunkten auch die unserer Curve. Da nun das Netz drei feste Punkte enthält, so zerfällt die Jacobi'sche Curve in die drei Seiten des durch die drei Doppelpunkte bestimmten Dreiecks. Diese Seiten aber stellen wir dar in der Gleichung dritten Grades

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wenn wir

$$\varphi = \begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix}, \quad \psi = \begin{vmatrix} B & B' \\ C & C' \end{vmatrix}, \quad \chi = \begin{vmatrix} C & C' \\ A & A' \end{vmatrix}$$

und z. B.

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

setzen.



Mit Hilfe der Formentheorie ist diese Gleichung in drei Factoren zu zerlegen, welche die Gleichungen der Dreiecksseiten sind und deren Schnittpunkte (die gesuchten Doppelpunkte) liefern.

In gleicher Weise finden wir nun für die Doppeltangenten der entsprechenden Curve vierter Klasse durch Differentiation der Gleichung

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 \\ 0 & \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

die gemeinschaftlichen Tangenten der drei Kegelschnitte:

$$\begin{vmatrix} (ABu) & (ACu) \\ (A'B'u) & (A'C'u) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} (ACu) & (BCu) \\ (A'C'u) & (B'C'u) \end{vmatrix} = 0$$

und

$$\begin{vmatrix} (BCu) & (BAu) \\ (B'C'u) & (B'A'u) \end{vmatrix} = 0,$$

welche ein Gewebe bestimmen und identisch mit den §. 4 gefundenen Curven  $\Delta = 0$ ,  $B = 0$ ,  $\Gamma = 0$  sind.

Ehe wir an die so erhaltenen Kegelschnittssysteme weitere Betrachtungen anknüpfen, geben wir noch die von Schröter angegebene Methode zur Auffindung der Doppelpunkte in Anlehnung an die §. 2 geleistete analytische Darstellung der Hilfskegelschnitte.

Schröter verwendet dazu das §. 4 abgeleitete System von Hilfskegelschnitten, indem er zeigt, dass für den



Fall eines Doppelpunktes die Punktreihen, welche den Hilfskegelschnitt erzeugen, perspektivisch sein müssen. In Folge dessen zerfällt der Kegelschnitt selbst in zwei Punkte, von welchen der eine eben der Doppelpunkt der Curve ist. Nun befinden sich in der Reihe der Hilfskegelschnitte drei zerfallende. Jeder von ihnen besteht aus einer Ecke des der Reihe gemeinschaftlichen Tangentendreiecks und einem auf die gegenüberliegende Seite fallenden Punkte. Daher bestimmen sich die Doppelpunkte unserer Curve vierter Ordnung als

die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten der Hilfskegelschnitt-Reihe:

$$A + 2\lambda B + \lambda^2 \Gamma = 0,$$

wo  $\lambda$  ein von  $+\infty$  bis  $-\infty$  laufender Parameter (siehe §. 2) ist.

Ganz analog erhalten wir die Doppeltangenten der entsprechenden Klassencurve

als die Seiten des durch die drei festen Punkte bestimmten Dreiecks, welche die Hilfskegelschnitte

$$A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0$$

des §. 3 gemein haben.



§. 5.

**Beziehungen der bei Bestimmung der Doppelpunkte  
resp. Doppeltangenten auftretenden Kegelschnitt-  
systeme zu den erzeugten Curven.**

Ueberblicken wir die im vorigen Paragraphen gefundenen Kegelschnittsysteme, so sehen wir, dass das auf dem Wege der Differentiation gewonnene Netz zur Bestimmung der Doppelpunkte der Ortscurve dasselbe ist, wie das mit Schröter gewonnene zur Bestimmung der Doppeltangenten der entsprechenden Klassencurve; und ebenso ist das Gewebe zur Bestimmung der Doppeltangenten der Klassencurve, welches durch Differentiation gewonnen wurde, identisch mit dem von Schröter zur Bestimmung der Doppelpunkte der entsprechenden Ortscurve erhaltenen Gewebe. Wir können also sofort den Satz aussprechen:

**Das Doppelpunktsdreieck der Curve vierter Ordnung und das Doppeltangentendreieck ihrer entsprechenden Curve vierter Klasse sind identisch.**

Zugleich aber sehen wir, dass  
das System der Kegelschnitte

$$A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0$$

dem Doppelpunktsdreiecke umschrieben ist, während das System

$$A + 2B\lambda + \lambda^2 \Gamma = 0$$

demselben einbeschrieben ist,



d. h. die drei gemeinschaftlichen Punkte des ersten sind die Schnittpunkte der drei gemeinschaftlichen Tangenten des zweiten Systems.

Aus der Theorie der Curven vierter Ordnung wissen wir aber, dass eine solche entsteht als Enveloppe des veränderlichen Kegelschnitts

$$U + 2\lambda V + \lambda^2 W = 0$$

in der Form:

$$UW - V^2 = 0,$$

wo  $U, V, W$  beliebige Formen zweiter Ordnung sind. Kegelschnittreihen derselben Art sind nun auch die eben erhaltenen Kegelschnittsysteme.

Sie werden also auch Curven vierter Ordnung resp. Klasse umhüllen, deren Gleichungen

$$AC - B^2 = 0$$

und

$$AT - B^2 = 0$$

sind.

Ausgerechnet erhalten wir aber nichts anderes als die viergliedrigen Determinanten, welche wir als Gleichung für die Klassen- resp. Ordnungcurve gefunden haben, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man dieselben nach zweigliedrigen Unterdeterminanten berechnet. Dies giebt den Satz:

**Die Schröter'schen Hilfskegelschnitte der Curve vierter Ordnung umhüllen die dieser entsprechende Klassencurve, und umgekehrt:**

**Die Schröter'schen Hilfskegelschnitte einer Curve vierter Klasse umhüllen die ihr entsprechende Curve vierter Ordnung.**



Weiterhin werden wir noch ein zweites System von Kegelschnitten erhalten, welches die Curve vierter Ordnung berührt. Das hier gefundene hat die Eigenschaft, dass es die Curve in drei festen Punkten — den Doppelpunkten — berührt, somit hier uneigentlich, während der vierte, eigentliche, Berührungspunkt des variablen Kegelschnitts des Systems mit demselben variirt.

Wie so die Auffindung der Doppelpunkte durch die synthetische Methode Schröter's in einfacher Weise geleistet wird, ist auch die analytische Darstellung derselben als gemeinschaftlicher Punkte dreier Kegelschnitte die einfachste, die gegeben werden kann, wenn auch die Auflösung einer Gleichung dritten Grades dabei nicht zu umgehen ist, sobald man sie getrennt haben will.

Als Anhang zu diesem Paragraphen möge hier nur noch eine geometrische Ueberlegung Platz finden, welche zeigt, dass ein Doppelpunkt der Curve vierter Ordnung zugleich auf den zwei Doppeltangenten der entsprechenden Curve vierter Klasse liegen muss.

Es seien (siehe Fig. 3)  $K$  und  $K'$  die beiden erzeugenden Kegelschnitte, und die Gerade  $L$  eine Doppeltangente der Curve vierter Klasse. Dann muss der Punkt 1 auf  $K$  dem Punkte 1' auf  $K'$  entsprechen und ebenso Punkt 2 dem Punkte 2'. Im Allgemeinen wird nun die Gerade  $L$  unsere Curve vierter Ordnung in vier Punkten schneiden, deren einer  $p$  sein mag. Die von ihm an die beiden Kegelschnitte gehenden Tangenten entsprechen sich dann und ebenso ihre Berührungspunkte etwa 3



resp.  $3'$ . Dann muss es zu 1, 2 und 3, wie zu  $1'$ ,  $2'$  und  $3'$  einen vierten harmonischen Punkt geben, und diese Punkte 4 und  $4'$  sind wieder entsprechende Punkte, geben also durch den Schnitt ihrer Tangenten Anlass zu einem neuen Punkte der Curve vierter Ordnung. Nun werden diese vierten harmonischen Punkte bekanntlich gefunden, wenn wir zu  $p$  die Polare in Bezug auf jeden der Kegelschnitte construiren, was mit Hilfe der beiden von  $p$  an die beiden Kegelschnitte möglichen Tangenten geschieht. Das erste Paar kennen wir schon als entsprechende Tangenten, also muss auch das zweite Paar, das in 4 und  $4'$  berührt ist, sich entsprechen. Damit ist bewiesen, dass, wenn ein Punkt der Curve vierter Ordnung auf der Doppeltangente der Klassencurve liegt, auch sofort ein zweiter von den vier möglichen Schnittpunkten der Geraden mit der Curve in diesen Punkt fällt, so dass die vier Schnittpunkte auf zwei Doppelpunkte der Doppeltangente sich vertheilen. Da dies aber Punkte mit verschiedenen Parameterwerthen sind, so ist der obige Satz erwiesen.

---

§. 6.

**Zweites System von Kegelschnitten, welche die Curve vierter Ordnung in vier Punkten berühren.**

Wie schon oben bemerkt, existirt noch ein zweites leicht anzugebendes System von Kegelschnitten, welche unsere Curve in vier Punkten berühren. Die



Determinantenform, in welcher wir die Gleichung unserer Curve erhalten haben, giebt den Weg zur Aufstellung desselben. Sie bleibt nämlich ungeändert, wenn wir statt der Functionen  $A, B, C, A', B', C'$  lineare Combinationen derselben einsetzen. Denn die Determinante

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ A' & B' & B & 0 \\ 0 & A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

*B' & C'!*

ist auch

$$= \begin{vmatrix} xA + vA' & xB + vB' & xC + vC' & 0 \\ x'A + v'A' & x'B + v'B' & x'C + vC' & 0 \\ 0 & xA + vA' & xB + vB' & xC + vC' \\ 0 & x'A + v'A' & x'B + v'B' & x'C + vC' \end{vmatrix}.$$

Wie nun die erste Determinante entstand durch Elimination von  $\lambda$  aus den beiden Gleichungen

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$$

und

$$A' + 2B'\lambda + C'\lambda^2 = 0$$

so können wir die zweite Determinante erhalten durch Elimination von  $\lambda$  aus den beiden Gleichungen

$$(xA + vA') + 2\lambda(xB + vB') + \lambda^2(xC + vC') = 0$$

und

$$(x'A + v'A') + 2\lambda(x'B + v'B') + \lambda^2(x'C + vC') = 0.$$

Dies sind wieder zwei Tangentensysteme, wie wir sie zu Anfang unserer Untersuchung aufgestellt haben. Als ihre Träger erhalten wir, wie dort, die Kegelschnitte



$$0 = (x_A + v_A') (x_C + v_C') - (x_B + v_B')^2$$

und

$$0 = (x'_A + v'_A) (x'_C + v'_C) - (x'_B + v'_B)^2$$

welches zwei Kegelschnitte der Reihe

$$0 = (AC - B^2) + \mu(AC' + A'C - 2BB') + \mu^2(A'C' - B'^2)$$

für die Parameterwerthe

$$\mu = \frac{v}{x} \text{ und } \mu = \frac{v'}{x'} \text{ sind.}$$

Lassen wir  $\mu$  alle Werthe von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchlaufen, so erhalten wir eine einfach unendliche Reihe von Kegelschnitten, aus deren Mitte wir je beliebige zwei herausnehmen können, um durch ihre Tangentensysteme dieselbe Curve zu erzeugen; d. h.

**Dieselbe Curve vierter Ordnung kann noch auf zweifach unendlich vielen Weisen durch projectivische Tangentensysteme erzeugt werden.**

Nun ergibt wieder die Theorie der Curven vierter Ordnung, dass die Kegelschnitte

$$(AC - B^2) + \mu(AC' + A'C - 2BB') + \mu^2(A'C' - B'^2) = 0$$

eine Curve vierter Ordnung umhüllen, deren Gleichung

$$4(AC - B^2)(A'C' - B'^2) - (AC' + A'C - 2BB')^2 = 0 \text{ ist.}$$

Rechnen wir aber dies aus, so finden wir unsere ursprüngliche Curvengleichung wieder, was zugleich den analytischen Beweis für den Schröter'schen Satz giebt:



Die Curve vierter Ordnung berührt die erzeugenden Kegelschnitte je in vier Punkten.

Für die entsprechende Klassencurve erhalten wir ebenso die Reihe der Kegelschnitte:

$$\{ (BCu)(ABu) - (ACu)^2 \} + \lambda \{ (BCu)(A'B'u) + (B'C'u)(ABu) - 2(ACu)(A'C'u) \} + \lambda^2 \{ (B'C'u)(A'B'u) - (A'C'u)^2 \} = 0,$$

aus welchen je zwei beliebige die Curve erzeugen, und welche auch von der Curve vierter Classe je in vier Punkten berührt werden.

Eine Bemerkung möge hier angefügt sein, welche zu einem hübschen Satz über die Berührungspunkte der Ordnungs- und Klassencurve mit den erzeugenden Kegelschnitten führt. Ist nämlich — und es tritt dies viermal ein — die Lage zweier entsprechenden Tangenten  $L$  und  $L'$  die, dass  $L'$  die  $L$  in ihrem Berührungspunkt  $x$  mit  $K$  trifft, so ist  $x$  ein der Curve vierter Ordnung angehöriger Punkt, so dass der Kegelschnitt  $K$  die Ordnungcurve in  $x$  berührt. Da nun  $x$  und  $x'$  (der Berührungspunkt der  $L'$  mit  $x'$ ) sich entsprechen, wird  $L'$  Tangente der entsprechenden Curve vierter Klasse sein, also  $x'$  Berührungspunkt derselben mit dem Kegelschnitte  $K'$ . Daraus folgt, abgesehen davon, dass auf diese Weise die Berührungspunkte der Klassencurve mit den erzeugenden Kegelschnitten leicht aus denjenigen der Ordnungcurve zu construiren sind, der Satz:

Das Doppelverhältniss der Berührungspunkte der Curve vierter Ordnung mit dem einen erzeugenden Kegelschnitte ist gleich dem Doppelverhältnisse der Berührungspunkte



der entsprechenden Curve vierter Klasse mit dem andern erzeugenden Kegelschnitte und umgekehrt.

Endlich erledigt sich auch hier noch die §. 1 aufgestellte Frage nach der Constantenzahl unserer Curvevergleichung. Denn durch die zweifache Variabilität der zur Erzeugung derselben Curve verwendbaren Kegelschnitte geht die dort gefundene Zahl der Constanten auf 11 herunter, so dass wir also die allgemeinste Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten vor uns haben.

---

### §. 7.

#### Umkehr der Erzeugung.

Aus der letzten Bemerkung des vorigen Paragraphen geht hervor, dass eine jede Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten auf die seither behandelte Art erzeugt werden kann, d. h. dass bei jeder durch ihre Gleichung gegebenen Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten ein System von erzeugenden Kegelschnitten aufgestellt werden kann, wie wir es in der Reihe

$$(AC - B^2) + \lambda(AC' + A'C - 2BB') + \lambda^2(A'C' - B'^2) = 0$$

im vorigen Paragraphen gefunden haben.

Wir versuchen im Folgenden, in Anlehnung an eine specielle Lage des Coordinatensystems zu unserer Curve und einer daraus sich ergebenden einfachen



Gleichungsform, das Problem zu lösen, aus der Curvengleichung heraus das System der erzeugenden Kegelschnitte aufzustellen. Dabei werden wir folgenden Weg der Untersuchung einhalten. Wir zeigen zuerst, dass das System unserer erzeugenden Kegelschnitte die drei Tangentenpaare, die von den Doppelpunkten an die Curve noch möglich sind, je doppelt zählend als zerfallende Kegelschnitte enthält. Indem wir dann die Gleichung von zwei Paaren solcher Tangenten aus der Curvengleichung entwickeln, haben wir für das zu suchende Kegelschnittsystem zwei demselben angehörende Kegelschnitte gefunden und können hieraus das ganze System aufstellen, womit unser Problem gelöst ist.

Zunächst also mag bewiesen werden, dass in unserem Kegelschnittsystem

$$(AC - B^2) + \lambda(AC' + CA' - 2BB') + \lambda^2(A'C' - B'^2) = 0$$

die von den Doppelpunkten der Curve ausgehenden Tangentenpaare überhaupt vorkommen. Wir wollen hiezu die linearen Ausdrücke  $A, B, C, A', B', C'$  mit einem untern Index versehen, um anzudeuten, dass in ihnen die Variabeln  $x_i$  durch  $y_i$  ersetzt werden sollen. Setzen wir dann:

$$P = A_y C_y - B_y^2, \quad Q = A'_y C'_y - B'_y^2$$

$$R = A_y C'_y + C_y A'_y - 2B_y B'_y,$$

so bestimmen sich die beiden durch einen beliebigen Punkt  $y$  gehenden Kegelschnitte des Systems aus der in  $\lambda$  quadratischen Gleichung:



$$\lambda^2 Q + \lambda R + P = 0.$$

Liegt aber der Punkt  $y$  auf der erzeugenden Curve

$$AC - B^2 = 0,$$

oder:

$$4(AC - B^2) (A'C' - B'^2) - (AC' + CA' - 2BB') = 0,$$

so verschwindet die Diskriminante dieser Gleichung, d. h. der Ausdruck

$$4PQ - R^2,$$

und die eine Wurzel derselben ist gegeben durch:

$$\lambda = - \frac{R}{2Q}.$$

Gleichzeitig ist aber wegen  $R^2 = 4PQ$ :

$$\lambda^2 = \frac{P}{Q}.$$

Es ist also der eine durch einen Punkt  $y$  der Curve vierter Ordnung gehende (und also in  $y$  berührende) Kegelschnitt des Systems gegeben durch die Gleichung

$$2P(AC - B^2) - R(AC' + CA' - 2BB') + 2Q(A'C' - B'^2) = 0.$$

Ist nun insbesondere der Punkt  $y$  einer der drei Doppelpunkte, so verschwindet die linke Seite der Curvengleichung für  $x_i = y_i$  quadratisch, indem gleichzeitig

$$A = 0, B = 0, C = 0 \text{ ist.}$$

Diese linke Seite aber, für  $x_i = y_i$  gebildet, ist identisch mit  $PQ - R^2$ . Auch letzterer Ausdruck



verschwindet also quadratisch. Nun geht aber auch die linke Seite der Gleichung, welche wir soeben für den durch  $y$  gehenden Kegelschnitt unseres Systems gefunden haben, für  $x_i = y_i$  in  $PQ - R^2$  über. Auch die Gleichung dieses Kegelschnitts verschwindet also quadratisch für  $x_i = y_i$ , d. h. der Kegelschnitt hat in  $y$  einen Doppelpunkt: er zerfällt in ein Linienpaar, dessen Scheitel in  $y$  liegt. Da nun das Linienpaar die Curve vierter Ordnung noch berühren muss, so kann es nur entweder aus den Verbindungslinien von  $y$  mit den beiden anderen Doppelpunkten, oder aus den von  $y$  aus an die Curve vierter Ordnung zu legenden Tangenten bestehen. Ersteres tritt aber nicht ein, denn sonst müsste die Gleichung unseres durch  $y$  gehenden Kegelschnitts identisch erfüllt werden, wenn man gleichzeitig setzt:

$$A = 0, B = 0, C = 0, \text{ oder:}$$

$$AB' = BA', BC' = CB', AC' = CA',$$

und dies ist, wie man sofort sieht, nicht der Fall. In dem Kegelschnittssysteme sind also wirklich die drei von den Doppelpunkten der Curve vierter Ordnung an diese möglichen Tangentenpaare enthalten. Dass jedes dieser Paare doppelt als Kegelschnitt zu zählen ist, ergibt sich von selbst bei den folgenden Rechnungen.

Wenn wir nun umgekehrt von einer Curve vierter Ordnung ausgehen, so können wir die Gleichung derselben unbeschadet der Allgemeinheit auf das Doppelpunktsdreieck als Coordinatendreieck bezogen voraussetzen. Sie lautet dann:



$$a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{33} x_1^2 x_2^2 + 2a_{12} x_3^2 x_1 x_2 \\ + 2a_{13} x_2^2 x_1 x_3 + 2a_{23} x_1^2 x_2 x_3 = 0.$$

Um von einem Doppelpunkte, etwa  $(x_2 = 0, x_3 = 0)$  aus das Tangentenpaar an die Curve zu erhalten, schneiden wir die Curve mit einer Geraden durch  $x_2 = 0, x_3 = 0$  und einen beliebigen andern Punkt  $y$ , den wir der Einfachheit wegen auf  $x_1 = 0$  annehmen. Die Coordinaten des auf der Geraden variablen Punktes sind dann

$$x_1 = 1 + \lambda \cdot 0 \\ x_2 = 0 + \lambda y_2 \\ x_3 = 0 + \lambda y_3,$$

welche in die Curvengleichung eingesetzt eine quadratische Gleichung für  $\lambda$  ergeben, deren Diskriminante, als Bedingung für das Zusammenfallen der Schnittpunkte die Gleichung des gesuchten Tangentenpaars liefert. Ausgeführt erhalten wir

$$\lambda^4 a_{11} y_2^2 y_3^2 + \lambda^2 a_{22} y_3^2 + \lambda^2 a_{33} y_2^2 + 2\lambda^3 a_{12} y_3^2 \\ + 2\lambda^3 a_{13} y_2^2 y_1 + 2\lambda^2 a_{23} y_1 y_3 = 0,$$

wo der heraustretende Factor  $\lambda^2$  die zwei Linien  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 0$  bedeutet. Die Discriminante hievon gebildet, giebt

$$f = A_{22} x_2^2 + A_{33} x_3^2 - 2A_{23} x_2 x_3 = 0$$

als die Gleichung des verlangten Tangentenpaars, wo



$$A_{ik} = \frac{\partial R}{\partial a_{ik}}$$

ist, wenn wir unter  $R$  die Determinante unserer Curvengleichung verstehen. Ebenso finden wir für die Tangentenpaare aus den zwei andern Doppelpunkten die Gleichungen

$$\varphi = A_{13} x_3^2 + A_{11} x_1^2 - 2A_{13} x_1 x_3 = 0$$

$$\psi = A_{11} x_1^2 + A_{22} x_2^2 - 2A_{12} x_1 x_2 = 0$$

Da nun in dem System der erzeugenden Kegelschnitte die beiden Tangentenpaare

$$f = 0, \varphi = 0$$

enthalten sind, so wird dasselbe nach §. 6 die Form haben

$$f + \mu W + \mu^2 \varphi = 0,$$

und unsere Curvengleichung wird nach den dort gefundenen Resultaten

$$F = 4f \cdot \varphi - W^2 = 0$$

sein, wo nur  $W$  zu bestimmen ist, da  $F = 0$  unsere Curvengleichung, also bekannt ist. Da nun  $f = 0$  und  $\varphi = 0$  nach Obigem in dem Systeme der erzeugenden Kegelschnitte enthalten sind, ist es hieraus leicht,  $W$  zu finden und damit das System

$$f + \mu W + \mu^2 \varphi = 0$$

aufzustellen.



Rechnen wir dies aus, indem wir für  $f = 0$ ,  $\varphi = 0$  und  $F = 0$  ihre Werthe einsetzen, so kommt unter Beachtung der Determinantensätze über adjungirte Systeme:

$$W^2 = 4f \cdot \varphi - F$$

$$= (A_{23} x_2 x_3 + A_{13} x_1 x_3 - A_{12} x_1 x_2 - A_{33} x_3^2)^2,$$

so dass also die Gleichung unseres Kegelschnittsystems für  $F = 0$  lauten würde:

$$\begin{aligned} & \mu^2(A_{22} x_2^2 + A_{33} x_3^2 - 2A_{23} x_2 x_3) \\ & + 2\lambda(A_{23} x_2 x_3 + A_{13} x_1 x_3 - A_{12} x_1 x_2 - A_{33} x_3^2) \\ & + \lambda^2(A_{33} x_3^2 + A_{11} x_1^2 - 2A_{13} x_1 x_3) = 0. \end{aligned}$$

Ist dies nun wirklich unser System, so muss dasselbe das dritte Tangentenpaar  $\psi = 0$  auch als erzeugenden Kegelschnitt enthalten. Können wir also letzteres nachweisen, so haben wir die Bestätigung für die Richtigkeit unseres Verfahrens, die Kegelschnittreihe selbst aufzustellen, gewonnen.

Betrachten wir zu dem Zwecke die Determinante der obigen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 A_{11} & -\lambda \mu A_{12} & +\lambda \mu A_{13} & -2\lambda^2 A_{13} \\ -\lambda \mu A_{11} & +\lambda \mu A_{13} - 2\lambda^2 A_{13} & -2\mu^2 A_{23} & +\lambda \mu A_{23} \\ +\lambda \mu A_{31} - 2\lambda^2 A_{31} & -2\mu^2 A_{32} + \lambda \mu A_{32} & \mu^2 A_{33} - \lambda \mu A_{33} & +\lambda^2 A_{33} \end{vmatrix},$$

so finden wir, dass sie übergeht in



$$\mu^2 \lambda^2 (\lambda - 1)^2 \begin{vmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = \mu^2 \lambda^2 (\lambda - 1)^2 \Delta,$$

und wir erkennen hieraus sofort, dass in unserer Reihe als zerfallende Kegelschnitte  $f = 0$  und  $\varphi = 0$  enthalten sind für  $\lambda = 0$  und  $\lambda = \infty$  und zwar doppelt zählend. Ferner ergibt der Werth  $\lambda = +1$  einen solchen ebenfalls doppelt zählenden Kegelschnitt. Setzen wir aber  $\lambda = +1$  in die Gleichung unseres Kegelschnittsystems ein, so folgt der Kegelschnitt

$$\psi = 0.$$

Damit sind nun folgende Sätze bewiesen:

1. Das zur Erzeugung einer Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten dienende Kegelschnittssystem besitzt drei doppelt zählende zerfallende Kegelschnitte. Es sind die Tangentenpaare, die von den Doppelpunkten an die Curve gezogen werden können. s. N.!

2. Jede Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten gestattet eine Erzeugung durch projectivische Tangentensysteme. Das System der erzeugenden Kegelschnitte wird aus der Curvengleichung heraus in der eben gegebenen Weise aufgestellt.

Es bleibt hiebei nur noch ein Punkt zu erledigen: in welcher Weise nämlich aus dem so gefundenen System der erzeugenden Kegelschnitte nun auch sofort die projectivischen Tangentensysteme aufgestellt werden, die unsere Curve erzeugen. Es geschieht dies einfach dadurch, dass wir beliebige zwei Kegelschnitte



der Reihe — entsprechend zwei Parameterwerthen  $\lambda_0$  und  $\lambda_1$  — herausgreifen und die Zuordnung zwischen beiden Tangentensystemen auf diesen Kegelschnitten so feststellen, dass unsere Curve vierter Ordnung resultirt. Dies kann in folgender Weise geschehen:

Haben wir unser System erzeugender Kegelschnitte wie pag. 35 in der Form:

$$\varphi + 2\lambda f + \lambda^2 \psi = 0$$

aufgestellt, so nehmen wir zwei beliebige Kegelschnitte

$$\Phi_0 = \varphi + 2\lambda_0 f + \lambda_0^2 \psi = 0$$

$$\Phi_1 = \varphi + 2\lambda_1 f + \lambda_1^2 \psi = 0$$

heraus, und stellen sie in der Form

$$\Phi_0 = AC - B^2 = 0$$

$$\Phi_1 = A'C' - B'^2 = 0$$

dar. Es geschieht dies dadurch, dass wir die Gerade  $B = 0$  beliebig annehmen, wo dann die Tangenten  $A = 0$ ,  $C = 0$  in den Schnittpunkten von  $B = 0$  mit  $\Phi_0 = 0$  sich leicht ergeben, da sie sich im Pole  $y$  der  $B$  schneiden. Nimmt man dann  $B'$  als Polare desselben Punktes  $y$ , so resultirt  $\Phi_1$  in der obigen Form, indem das Product  $A'C'$  aus  $AC$  dadurch entsteht, dass man darin  $\lambda_1$  statt  $\lambda_0$  setzt.

Hiebei ist also Punkt  $y$  (weil die Linie  $B = 0$ ) willkürlich und es schneiden sich  $A$  und  $C$ , wie auch  $A'$  und  $C'$  in demselben. Nimmt man nun für  $y$  einen Doppel-  
punkt der Curve vierter Ordnung, so kann man es so



einrichten, dass bez. die Tangenten A und A', C und C' der beiden Kegelschnitte  $\psi$  und  $\psi_1$  einander bei Erzeugung vorliegender Curve vierter Ordnung zugeordnet sind. In den beiden Tangentensystemen der Kegelschnitte  $\psi_0$  und  $\psi_1$  :

$$A + 2\mu B + \mu^2 C = 0$$

$$A' + 2\mu' B' + \mu'^2 C' = 0$$

hat man also zur Festlegung der Zuordnung nur noch ein drittes Paar entsprechender Tangenten zu bestimmen; oder mit anderen Worten, man hat in der Gleichung

$$a\mu\mu' + b\mu + c\mu' + d = 0$$

die Coefficienten a, b, c, d so zu bestimmen, dass die aus den drei letzten Gleichungen resultirende Curve vierter Ordnung mit der gegebenen zusammenfällt. Wir wissen aber, dass für  $\mu = 0$  auch  $\mu' = 0$  sein muss, also ist  $d = 0$ ; ebenso  $a = 0$ , da für  $\mu = \infty$  auch  $\mu' = \infty$ . Wir haben also nur in  $\mu = \alpha\mu'$  (wo  $\alpha = -\frac{b}{c}$ )  $\alpha$  zu bestimmen. Die aus den beiden Kegelschnittsystemen

$$A + 2\mu B + \mu^2 C = 0$$

$$A' + 2\alpha\mu B' + \alpha^2\mu^2 C' = 0$$

resultirende Curve vierter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ A' & \alpha B' & \alpha^2 C' & 0 \\ 0 & A' & \alpha B' & \alpha^2 C' \end{vmatrix} = 0$$



soll nun mit der gegebenen Curve vierter Ordnung identisch sein, und daraus ergibt sich  $\alpha$  durch Coefficientenvergleichung. Dies gibt zunächst mehr Gleichungen, von denen nur eine zur Bestimmung von  $\alpha$  nöthig ist. Die andern müssen dann Folgen dieser einen (die übrigens beliebig herausgewählt werden kann) sein.

Es versteht sich von selbst, dass die ganze Betrachtung sich dualistisch auf die Curven vierter Klasse mit drei Doppeltangenten überträgt.

---

### §. 8.

#### **Lemniscate als Curve unserer Erzeugung.**

Wir geben in diesem Paragraphen eine direkte Anwendung der zuletzt gefundenen Sätze auf die specielle Gleichungsform unserer Curve:

$$a_{11}^2 x_2^2 x_3^2 + a_{22}^2 x_3^2 x_1^2 + a_{33}^2 x_1^2 x_2^2 = 0$$

Veranlassung dazu giebt die in der metrischen Geometrie behandelte Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, welche unter dem Namen „Lemniscate“ als Fusspunktskurve der gleichseitigen Hyperbel erscheint, und deren Construction, wie wir unten sehen werden, gerade mit unserer Erzeugung sich deckt. Dieselbe besitzt in der gewöhnlich gegebenen Form



$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

einen Doppelpunkt im Coordinaten-Anfangspunkte und zwei, bez. in den imaginären Kreispunkten der Ebene. Transformiren wir nun diese Gleichung, nachdem wir sie homogen gemacht, auf das Doppelpunktsdreieck als Coordinatendreieck mit Hilfe der Substitution

$$x = \frac{1}{2} (x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2} (x_1 - x_2), \quad t = x_3,$$

so nimmt sie die Form

$$a^2 x_2^2 x_3^2 + a^2 x_3^2 x_1^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 0$$

an, welche sich von unserer an die Spitze gestellten Gleichung nur durch die Gleichheit der beiden ersten Coefficienten unterscheidet, was nicht wesentlich ist, da wir die Gleichung

$$a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{33} x_1^2 x_2^2 = 0$$

immer auf die Form

$$y_1^2 y_2^2 + y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2 = 0$$

bringen können. Wir sind daher wohl berechtigt, alle in der Gleichungsform

$$a_{11}^2 x_2^2 x_3^2 + a_{22}^2 x_3^2 x_1^2 + a_{33}^2 x_1^2 x_2^2 = 0$$

enthaltenen Curven als Lemniscaten zu bezeichnen.



Wir finden nun nach dem im vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren das System der zu unserer Curve gehörenden Hilfskegelschnitte in der Form:

$$a_{11} a_{33} y_2^2 + a_{11} a_{22} y_3^2 + 2\lambda(-a_{11} a_{22} y_3^2) \\ + \lambda^2(a_{11} a_{22} y_3^2 + a_{12} a_{33} y_1^2) = 0.$$

Sie zeigt uns, dass wir ein System von Kegelschnitten vor uns haben, welche das Doppelpunktsdreieck unserer Curve als gemeinsames Polardreieck besitzen.

Wir schalten hier eine Bemerkung ein, die durch das eben gefundene Resultat veranlasst ist. Im Allgemeinen kann man bei Erzeugung der Curven nicht verlangen, dass sie ihre Doppelpunkte in drei gegebene Punkte lege. Denn durch drei Paare entsprechender Tangenten ist die Zuordnung festgelegt, während doch schon zwei Doppelpunkte vier Paare absorbiren. Im gegenwärtigen Falle jedoch sehen wir, dass, wenn eine Ecke des gemeinsamen Polardreiecks als Doppelpunkt und eine zweite als Punkt der zu erzeugenden Curve verlangt wird, diese zweite Ecke und auch die dritte Ecke Doppelpunkte der Curve werden. Es beruht dies darauf, dass das Doppelverhältniss der Tangentenpaare von den Ecken des Polardreiecks aus ein harmonisches, also für beide Kegelschnitte von allen 3 Ecken aus dasselbe ist.

Kehren wir zu unserer letzten Gleichung zurück, so erkennen wir, dass wir dann immer *Lemniscaten* erhalten, wenn wir bei zwei gegebenen Kegelschnitten



die Zuordnung so treffen, dass die Tangentenpaare von den Ecken eines beiden gemeinsamen conjugirten Dreiecks aus einander entsprechen. Diese Zuordnung aber ist in einfachster Weise herzustellen, wenn wir die beiden Kegelschnitte in ihrer Gleichungsform bezogen auf dieses Dreieck als Coordinatendreieck annehmen, d. h. den einen in der Form:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

den andern in der Form:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Dann lauten bekanntlich die Gleichungen der beiden Tangentensysteme

$$(x_1 + x_3) + 2\mu x_2 + \mu^2(x_3 - x_1) = 0$$

$$a_{22}(a_{33}x_1 + a_{11}x_3) + 2\lambda a_{33}a_{11}x_2 + \lambda^2(a_{11}x_3 - a_{33}x_1)a_{22} = 0$$

und um die verlangte Zuordnung herzustellen, ist einfach

$$\lambda - \mu = 0$$

zu setzen.

Es resultirt dann durch Elimination von  $\lambda$  und  $\mu$  sofort unsere oben gegebene Gleichungsform der Curve.

Um also «Lemniscaten» zu erzeugen, die ihre Doppelpunkte in drei gegebene Punkte legen, nehmen wir letztere als Ecken des Coordinatendreiecks, stellen die Gleichungen von zwei Kegelschnitten auf, welche dieses Dreieck als conjugirtes besitzen und lassen die Tangenten aus den Eckpunkten sich entsprechen.



Ist nun insbesondere verlangt, dass zwei der gegebenen Punkte, welche Doppelpunkte werden sollen, in die imaginären Kreispunkte der Ebene fallen, während der dritte beliebig liegt, so sehen wir sofort, dass das System der erzeugenden Kegelschnitte in ein System gleichseitiger Hyperbeln übergeht, welche den dritten Punkt zum Mittelpunkt haben. Denn gleichseitige Hyperbeln sind projectivisch eben dadurch definirt, dass sie die unendlich ferne Gerade in Punkten schneiden, welche mit den imaginären Kreispunkten harmonisch liegen. Die Reihe hat drei zerfallende Kegelschnitte nach §. 7, von denen hier nur einer reell ist, nämlich das durch den dritten Doppelpunkt (d. i. durch den gemeinsamen Mittelpunkt der Hyperbeln) gehende Linienpaar.

Nehmen wir dieses als den einen erzeugenden Kegelschnitt, so finden wir einmal als zweiten erzeugenden Kegelschnitt eine Hyperbel, deren Tangenten den Strahlen des durch den Doppelpunkt gehenden Büschels in der Weise zugeordnet sind, dass sie senkrecht auf einander stehen, ein Vorkommen, wie wir es unten im §. 10 wieder finden. Und dies ist ja nichts anderes, als die gewöhnliche Construction der Lemniscate.

Wir können den Satz aufstellen:

Die Lemniscate kann neben der gewöhnlichen Erzeugungsweise noch auf zweifach unendlich viele Weisen durch projectivische Tangentensysteme erzeugt werden, deren Träger gleichseitige concentrische Hyperbeln sind.

---



§. 10.

**Specialisirungen. Kreisconchoide.**

Wir begegnen in der metrischen Geometrie häufig\*) einer Curve vierter Ordnung mit einem reellen Doppelpunkte und zwei Spitzen in den imaginären Kreispunkten, welche unter dem Namen «Kreisconchoide», in ihrer metrischen Erzeugung keineswegs mit der unsrigen sich in der Uebereinstimmung zu befinden scheint, wie wir sie eben bei der Lemniscate gefunden haben. Und doch weisen die drei Doppelpunkte (denn die Spitzen involviren ja solche) auf unsere Erzeugung hin, wie denn auch die Anwendung des §. 8 auf die homogene Gleichung derselben, wenn wir sie auf ihr Doppelpunktsdreieck als Coordinatendreieck beziehen, als System der erzeugenden Kegelschnitte eine Schaar von Kreisen ergiebt. Wir schliessen hieraus, dass, da allen Kreisen die imaginären Kreispunkte gemeinsam sind, durch Auszeichnung dieser gemeinsamen Elemente jene Spitzen entstanden sind; und unsere nächste Aufgabe soll nun hieran anschliessend sein, zu untersuchen, wie solche Auszeichnungen in der allgemeinen Curve sich gestalten und welchen Einfluss sie haben. Daran soll sich dann eine Erzeugung der Kreisconchoide

---

\*) Siehe z. B. Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen der analytischen Geometrie, §. 61.



knüpfen, welche hauptsächlich zeigen soll, wie die allgemeinen projectivischen Eigenschaften unserer Curven in einfacher Weise in die Sprache der metrischen Geometrie sich übertragen lassen.

Haben wir zur Erzeugung einer Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten zwei Kegelschnitte gegeben, so haben dieselben zweierlei gemeinsame Elemente: ihre vier Schnittpunkte und ihre vier gemeinsamen Tangenten. Eine Auszeichnung derselben ist also nach zwei Hauptrichtungen hin möglich. Entweder lassen wir die Tangenten in den Schnittpunkten an die beiden erzeugenden Kegelschnitte sich entsprechen, oder wir bestimmen, es sollen die gemeinsamen Tangenten einander zugeordnet sein, wodurch natürlich die Zuordnung der Tangentensysteme eine specielle wird. Den Einfluss solcher Auszeichnung veranschaulichen wir uns durch folgende Betrachtung. Seien  $K$  und  $K'$  die beiden erzeugenden Tangentensysteme,  $x$  ein Schnittpunkt beider, und entspreche die Tangente in  $x$  an  $K$  der Tangente in  $x$  an  $K'$ . Dann ist  $x$  ein Punkt der Curve vierter Ordnung, zu welchem wir von irgend einer Seite her gelangen werden, wenn wir die Curve in einem gewissen Sinne durchlaufen. Nun werden aber unmittelbar vor dem Eintritte in den Punkt  $x$ , und unmittelbar nachher die entsprechenden Tangenten sich ausserhalb des von den Kegelschnitten umschlossenen Raumes schneiden, da sie ja nicht in denselben eindringen können. Es wird also die Curve im Punkt  $x$  von den Kegelschnitten weg und zu ihnen hin sich wenden, d. h. in  $x$  eine Spitze haben.



Verfolgen wir nun, welchen Einfluss eine in der oben angegebenen Weise ausgezeichnete gemeinsame Tangente auf die Curve vierter Ordnung ausübt, so sehen wir, dass der Schnitt der beiden Tangenten unbestimmt wird; die Tangente sondert sich von der Curve vierter Ordnung ab und es bleibt noch eine Curve dritter Ordnung.

Dualistisch finden wir, dass für die entsprechende Curve vierter Klasse der Einfluss eines ausgezeichneten Punktes in der Loslösung dieses Punktes und Erniedrigung der Klasse um eine Einheit besteht, während die Auszeichnung einer der gemeinsamen Tangenten eine Wendetangente der Klassencurve herbeiführt.

So werden wir auch schliessen, dass bei der Conchoide die Spitzen dadurch entstanden sind, dass die Tangenten in den imaginären Kreispunkten an die beiden erzeugenden Kreise einander zugeordnet werden.

Von Interesse ist hier noch, zu sehen, wie durch die angegebene Auszeichnung bei zwei gegebenen erzeugenden Kegelschnitten die möglichen Curven sich gruppieren.

Im Allgemeinen haben wir bei zwei zur Erzeugung gegebenen Kegelschnitten dreifach unendlich viele Curven vierter Ordnung. Zeichnen wir einen der Schnittpunkte unserer erzeugenden Kegelschnitte aus, was viermal möglich ist, so scheiden wir aus der dreifach unendlichen Schaar von Curven vierter Ordnung noch zweifach unendlich viele Curven mit einer Spitze in jenem Punkte aus.

Durch Auszeichnung von zwei Schnittpunkten erhalten wir einfach unendlich viele Curven mit zwei



Spitzen in jenen Punkten, was sechsmal möglich ist. Bei drei so ausgezeichneten Punkten endlich erhalten wir eine einzige Curve mit drei Spitzen, und da wir viermal solche drei Punkte combiniren können, sind vier Curven mit drei Spitzen in unserer dreifach unendlichen Mannigfaltigkeit von Curven vierter Ordnung enthalten.

Mehr als drei Elemente können wir nicht auszeichnen, da ja durch drei Paare von entsprechenden Tangenten die Zuordnung festgelegt ist, wie es ja auch keine Curven vierter Ordnung mit vier Spitzen geben kann.

Bei Auszeichnung einer gemeinsamen Tangente erhalten wir eine Gerade und zweifach unendlich viele Curven dritter Ordnung. Bei zweien erhalten wir neben den zwei Tangenten noch eine einfach unendliche Reihe von Kegelschnitten; und endlich, wenn wir drei gemeinsame Tangenten auszeichnen, zerfällt die Curve vierter Ordnung in vier Geraden, was auf vier Weisen möglich ist, jedoch, wie sich gleich zeigen wird, dasselbe Resultat gibt.

Durch Combination der gemeinsamen Punkte und Tangenten bei dieser Art der Auszeichnung können wir natürlich noch eine Menge specieller Fälle unserer Curve vierter Ordnung erhalten, die jedoch meistens ein Zerfallen der Curven in Curven dritter Ordnung, zweiter Ordnung, ungeraden Linien nach sich ziehen. Für die entsprechende Klassenkurve ist natürlich alles gesagte dualistisch umkehrbar, und insbesondere wird es vier Curven vierter Klasse geben, welche in vier



Punkte — die ausgezeichneten Punkte der beiden erzeugenden Kegelschnitte — zerfallen.

---

§. 11.

Den

**analytischen Nachweis,**

dass wir bei den Curven vierter Ordnung bez. Klasse durch die angegebenen Auszeichnungen Spitzen bez. Wendetangenten oder zerfallende Curven erhalten, wollen wir beispielsweise für den Fall führen, dass wir drei der Schnittpunkte unserer erzeugenden Kegelschnitte im genannten Sinne auszeichnen, woraus dann unmittelbar die Resultate für den Fall von drei Tangenten folgen.

Hiebei werden wir, unbeschadet der Allgemeinheit, das Coordinatensystem in die ausgezeichneten Punkte legen. Dann lauten die Gleichungen für die beiden erzeugenden Kegelschnitte:

$$1) a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0$$

und

$$2) b_{23}x_2x_3 + b_{31}x_3x_1 + b_{12}x_1x_2 = 0,$$

und es wird unsere Aufgabe sein, die Tangentensysteme, deren Träger diese beiden Kegelschnitte sind, in der §. 1 gestellten Form darzustellen. Zu dem Zweck stellen wir zuerst die Coordinaten eines Punktes der Kegelschnitte abhängig von einem Parameter dar,



woraus wir dann leicht die Gleichung der variablen Tangente in der verlangten Form erhalten.

Schneiden wir nun den Kegelschnitt 1) durch ein von einer Coordinatenecke — etwa  $x_1 = 0, x_2 = 0$  — ausgehendes Strahlbüschel, so schneidet dasselbe den Kegelschnitt noch in einem variablen Punkte, dessen Coordinaten in bekannter Weise durch die Relation:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda (a_{23} + \lambda a_{31}) : a_{23} + \lambda a_{31} : -\lambda a_{12}$$

von  $\lambda$  abhängen.

Ganz ebenso erhalten wir für den zweiten Kegelschnitt in der Relation:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \mu (b_{23} + \mu b_{31}) : b_{23} + \mu b_{31} : -\mu b_{12}.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkt  $x_1 x_2 x_3$  an den ersten Kegelschnitt ist, wenn  $y_i$  die laufenden Coordinaten sind:

$$0 = y_1 (a_{12}x_1 + a_{13}x_3) + y_2 (a_{21}x_3 + a_{21}x_1) \\ + y_3 (a_{31}x_1 + a_{32}x_2),$$

und an den zweiten Kegelschnitt:

$$0 = y_1 (b_{12}x_1 + b_{13}x_3) + y_2 (b_{23}x_3 + b_{21}x_1) \\ + y_3 (b_{31}x_1 + b_{32}x_2).$$

Setzen wir hierin die Werthe der Coordinaten in den Parametern  $\lambda$  und  $\mu$  ein, so bekommen wir die beiden Tangentensysteme, deren Träger die Kegelschnitte 1) und 2) sind in der Form:

$$a_{23}(a_{12}y_1 + a_{23}y_3) + 2\lambda a_{23}a_{13}y_3 + \lambda^2(a_{12}y_2 + a_{23}y_3)a_{13} = 0$$

und

$$b_{23}(b_{12}y_1 + b_{23}y_3) + 2\mu b_{23}b_{31}y_3 + \mu^2(b_{12}y_2 + b_{23}y_3)b_{13} = 0.$$



Im allgemeinsten Fall ist nun die Zuordnung

$$f(\lambda, \mu) = 0, \text{ d. h. } \lambda = \frac{\alpha\mu + \beta}{\alpha'\mu + \beta'}.$$

In unserem gegenwärtigen Falle sollen jedoch die Tangenten in den drei Ecken des Coordinatendreiecks sich selbst entsprechen, es wird also eine bestimmte Festlegung der Zuordnung eintreten müssen.

Nun sehen wir, dass für

$$\lambda = 0 \text{ und } \mu = 0$$

jedes der Systeme die Tangente im Punkte  $x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$  giebt, wie es sein soll, also muss in der Gleichung für die Zuordnung auch  $\lambda = 0$  werden, wenn wir  $\mu$  darin  $= 0$  setzen, was zur Folge hat, dass  $\beta = 0$  sein muss.

Ebenso erhalten wir für  $\lambda = \infty$  und  $\mu = \infty$  die Tangenten im Punkte  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ . Es muss also auch  $\alpha' = 0$  sein.

Da sich endlich auch die Tangenten im Punkte  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  entsprechen sollen, was geschieht, wenn

$$\mu = -\frac{b_{23}}{b_{31}}, \quad \lambda = -\frac{a_{23}}{a_{31}} \text{ ist,}$$

so muss

$$-\frac{a_{23}}{a_{31}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(-\frac{b_{23}}{b_{31}}\right).$$

Setzen wir also

$$\lambda = -\varrho \frac{a_{23}}{a_{31}}$$

$$\mu = -\varrho \frac{b_{23}}{b_{31}}$$



in unsere Gleichungen für die Tangentensysteme ein, so erhalten wir sie durch einen Parameter projektivisch auf einander bezogen in der Form:

$$0 = a_{13} (a_{12}y_1 + a_{32}y_2) + 2a_{13}a_{23}y_3\varrho \\ + \varrho^2 \cdot (a_{12}y_2 + a_{13}y_3) a_{23}$$

$$0 = b_{13} (b_{12}y_1 + b_{32}y_2) + 2b_{13}b_{23}y_3\varrho \\ + \varrho^2 \cdot (b_{12}y_2 + b_{13}y_3) b_{23}.$$

Hieraus bekommen wir die Gleichung unserer Curve in Determinantenform oder durch Berechnung von

$$1 : \varrho : \varrho^2$$

und Einsetzen der gefundenen Werthe in die Identität

$$\varrho^2 \cdot 1 - \varrho \cdot \varrho = 0$$

in der Form:

$$= y_2^2 y_3^2 a_{23}^2 b_{23}^2 (a_{12}b_{13} - b_{12}a_{13})^2 \\ + y_3^2 y_1^2 a_{31}^2 b_{31}^2 (a_{23}b_{21} - b_{23}a_{21})^2 \\ + y_1^2 y_2^2 a_{12}^2 b_{12}^2 (a_{31}b_{32} - b_{31}a_{32})^2 \\ - 2y_1 y_2 y_3^2 (a_{12}b_{13} - b_{12}a_{13}) (a_{23}b_{21} - b_{23}a_{21}) \\ - 2y_2 y_3 y_1^2 (a_{23}b_{21} - b_{23}a_{21}) (a_{31}b_{32} - b_{31}a_{32}) \\ - 2y_3 y_1 y_2^2 (a_{12}b_{13} - b_{12}a_{13}) (a_{31}b_{32} - b_{31}a_{32}) = 0,$$

welche Gleichung sofort erkennen lässt, dass wir in den drei ausgezeichneten Punkten

$$x_1 = x_2 = 0; \quad x_2 = x_3 = 0; \quad x_3 = x_1 = 0;$$

Spitzen haben, wie die geometrische Betrachtung es erwarten liess.



Um die Gleichung der entsprechenden Klassenkurve zu erhalten, setzen wir die oben erhaltenen Coordinaten

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda (a_{23} + \lambda a_{31}) : a_{23} + \lambda a_{31} : -\lambda a_{12}$$

in die Punktgleichung  $u_x = 0$  ein, wodurch wir die Gleichung

$$0 = a_{23}u_2 + \lambda (a_{23}u_1 + a_{23}u_2 + a_{12}u_3) + \lambda a_{13}u_1$$

als Gleichung des Punktsystems auf dem ersten Kegelschnitt bekommen.

Für den zweiten ist die Gleichung:

$$0 = b_{23}u_2 + \lambda (b_{23}u_1 + b_{31}u_2 + b_{12}u_3) + \lambda b_{31}u_1.$$

Durch die Substitution von  $\lambda = -\frac{a_{23}}{a_{31}} \rho$

und  $\mu = -\frac{b_{23}}{b_{31}} \rho$  erhalten wir wieder die beiden

Gleichungen durch einen Parameter aufeinander bezogen und durch Elimination desselben die Gleichung der Klassenkurve. Sie wird

$$0 = \begin{vmatrix} a_{13}u_1 & a_{23}u_1 + a_{31}u_2 + a_{12}u_3 & a_{23}u_1 & 0 \\ b_{13}u_1 & b_{23}u_1 + b_{31}u_2 + b_{12}u_3 & b_{23}u_1 & 0 \\ 0 & a_{13}u_1 & a_{23}u_1 + a_{31}u_2 + a_{12}u_3 & a_{23}u_1 \\ 0 & b_{13}u_1 & b_{23}u_1 + b_{31}u_2 + b_{12}u_3 & b_{23}u_1 \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\begin{aligned} & u_1^2 u_2 u_3 (a_{13} b_{23} - a_{23} b_{23}) (a_{12} b_{23} - a_{23} b_{12}) \\ & + u_1 u_2^2 u_3 (a_{21} b_{31} - a_{31} b_{21}) (a_{23} b_{31} - a_{13} b_{23}) \\ & + u_1 u_2 u_3^2 (a_{32} b_{12} - a_{12} b_{32}) (a_{31} b_{12} - a_{12} b_{31}) \\ & = 0. \end{aligned}$$



Sie zerfällt also in die vier Punkte

$$u_1 = 0; u_2 = 0; u_3 = 0$$

und

$$\begin{aligned} & u_1 (a_{13}b_{23} - a_{23}b_{13}) (a_{12}b_{23} - a_{23}b_{12}) \\ & + u_2 (a_{21}b_{31} - a_{31}b_{21}) (a_{23}b_{13} - a_{31}b_{23}) \\ & + u_3 (a_{32}b_{12} - a_{12}b_{32}) (a_{31}b_{12} - a_{12}b_{31}) = 0. \end{aligned}$$

Dieser letzte Punkt ist nun eben der vierte Schnittpunkt unserer beiden Kegelschnitte, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man seine Coordinaten in die beiden Kegelschnittgleichungen einsetzt, welche identisch dadurch erfüllt werden.

Man kann sich aber auch geometrisch davon überzeugen:

Verbinden wir nämlich Punkt 4 mit den ausgezeichneten Punkten 1, 2, 3, so sind 4, 1 2 3 drei Strahlen sowohl im einen als im andern Kegelschnitt. Da diese nun projektivisch aufeinander bezogen sind, so haben wir von 4 aus zwei projektivische Strahlbüschel mit drei gemeinschaftlichen Strahlen; sie müssen also aufeinander fallen. Somit muss die Verbindungslinie von je zwei entsprechenden Punkten  $aa'$  durch 4 gehen, letzterer Punkt also der Curve vierter Klasse angehören.

Bei Auszeichnung dreier gemeinschaftlicher Tangenten würden wir auf ganz demselben Wege erhalten, dass die Curve vierter Ordnung in die vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte zerfällt, während die entsprechende Klassenkurve drei Wendetangenten erhält.



§. 12.

**Kreisconchoide.**

Damit haben wir die nöthigen Mittel gewonnen, um die Kreisconchoide im Sinne unserer Erzeugung zu untersuchen. Wir erkannten sie als Curve vierter Ordnung mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkte, und stellen kurz noch einmal die aus der allgemeinen Betrachtung gewonnenen Resultate für diesen Fall zusammen.

Zur Erzeugung haben wir zwei Kegelschnitte, von deren vier Schnittpunkten wir zwei in der Weise auszeichnen, dass die Tangenten in denselben sich entsprechen, so dass zur Festlegung der Zuordnung nur noch über ein Paar zugeordneter Tangenten verfügt werden kann, also auch nur eine einfach unendliche Schaar von Curven möglich ist. In den so ausgezeichneten Punkten erhält die Curve vierter Ordnung Spitzen und besitzt im allgemeinen noch einen Doppelpunkt. Die entsprechende Klassenkurve zerfällt in jene zwei Punkte und einen Kegelschnitt.

Das beiden Curven gemeinschaftliche Doppelpunkts- resp. Doppeltangentendreieck legt zwei Ecken in die ausgezeichneten Punkte.

Die Schröter'schen Hilfskegelschnitte der Ordnungskurve, welche die entsprechende Klassenkurve umhüllen, berühren die Seiten des Dreiecks, während die Hilfskegelschnitte der entsprechenden Klassenkurve, welche die Ordnungskurve umhüllen, durch die Ecken



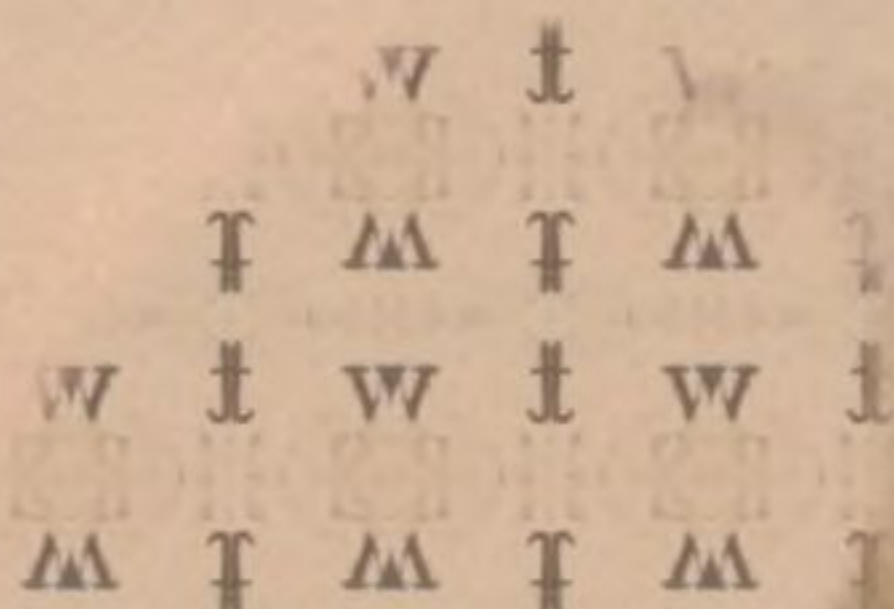
desselben, also auch durch die beiden ausgezeichneten Punkte gehen.

Die einfach unendliche Reihe derjenigen Kegelschnitte, welche zur Erzeugung derselben Curve verwendbar sind, geht ebenfalls durch die beiden ausgezeichneten Punkte, da diese vermöge ihrer Auszeichnung immer den beiden erzeugenden Kegelschnitten angehören müssen.

Nehmen wir insbesondere unsere erzeugenden Kegelschnitte so an, dass die auszuzeichnenden Punkte imaginär sind, so werden die Spitzen unserer Curve auch imaginär, und weil die Verbindungslinie der imaginären Punkte nicht mehr geschnitten werden kann, so ist unsere Curve ein Zug ähnlich der Figur 4.

Bestimmen wir endlich noch, dass die Schnittpunkte der erzeugenden Kegelschnitte die imaginären Kreispunkte der Ebene sein sollen, d. h. nehmen wir Kreise zu Trägern der Tangentensysteme und zeichnen dabei die imaginären Kreispunkte in der gegebenen Weise aus, so haben wir damit die Erzeugung der Kreisconchoide gewonnen.

Wir bemerken, dass unsere bisherigen Betrachtungen alle rein projektivischer Natur waren, wesshalb auch von Strecken oder Winkeln nie die Rede war. Die Wahl von Kreisen zu Trägern der Tangentensysteme würde ebenfalls an und für sich noch keine Vereinfachung in metrischem Sinne in sich schliessen. Denn es könnte die Zuordnung doch wieder in allgemeinsten Weise hergestellt werden. Bestimmen wir





aber noch, wie eben, dass die imaginären Kreispunkte in der gedachten Weise ausgezeichnet sein sollen, so bekommen wir dadurch die Mittel in die Hand, in einfacher Weise die noch möglichen, einfach unendlich vielen Zuordnungen im Sinne der metrischen Geometrie zu leisten. Im allgemeinen wird man bestimmen, dass ausser den ausgezeichneten Tangentenpaaren ein beliebiges drittes sich entspreche. Nehmen wir dann auf dem einen Kreis einen beliebigen vierten Punkt zu jenen Berührungspunkten hinzu, um seinen entsprechenden auf dem andern Kreise zu finden, so geschieht dies nach §. 1 vermittelt des Satzes, dass beide zu bildenden Doppelverhältnisse gleich sein müssen. Nennen wir also die beiden Kreispunkte  $i, i'$ , so muss das Doppelverhältniss der vier von einem beliebigen Punkt  $p$  des einen Kreises nach den Punkten  $i, i', 3, 4$  gezogenen Strahlen gleich sein dem Doppelverhältniss der vier Strahlen im 2<sup>ten</sup> Kreis, welche von einem beliebigen Punkt  $p'$  nach den Punkten  $i, i', 3', 4'$  gehen.

Der Logarithmus dieses Doppelverhältnisses wird aber, wie bekannt, proportional sein den Winkelbögen  $\overline{34}$  und  $\overline{3'4'}$ . \*) Da wir nun ferner wissen, dass der Peripheriewinkel die Hälfte des Centriwinkels ist, mit dem er auf gleichem Bogen steht, so haben wir den Satz:

**Die Winkelbögen zwischen entsprechenden Punkten und also auch die Winkel zwischen entsprechenden Tangenten sind einander gleich.**

---

\*) Siehe u. a. *F. Klein*, über die sogenannte Nicht-Enklidische Geometrie. *Mathematische Annalen* Bd. IV.



Wir können also die Erzeugung in folgender Weise ausführen:

Die Peripherieen der beiden erzeugenden Kreise werden in eine gleiche Anzahl von Bogengraden getheilt. Die Theilpunkte werden von einem bestimmten Anfangspunkte aus numerirt und dann die Tangenten einander so zugeordnet, dass der Tangente im  $n^{\text{ten}}$  Theilpunkte des einen Kreises die Tangente im  $(n+m)^{\text{ten}}$  Theilpunkt des andern Kreises entspricht, so dass wir sagen können, es eile die eine Tangente der andern um  $m$  Bogeneinheiten bez. den Winkel  $\alpha$  voraus. Zu beachten ist dabei nur, dass die Kreise in einerlei Sinn durchlaufen werden müssen, weil sonst eine Vertauschung der Kreispunkte eintritt. Es würde dann der Tangente im einen Kreispunkt an den einen Kreis die Tangente im andern Kreispunkt entsprechen, eine Zuordnung, die eine ganz andere Curve ergiebt.

Auf diese Weise sind die Schröter'schen Hilfskegelschnitte zur Construction nicht nöthig. Die Curve vierter Ordnung erhalten wir als Schnitt der entsprechenden Tangenten, die Klassenkurve als Enveloppe der die entsprechenden Punkte verbindenden Geraden.

---

### §. 13.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir dazu über, die Gleichung der so erhaltenen Curve, in be-



sonderer Anlehnung an unsere metrischen Vorstellungen aufzustellen. Wir nehmen zwei beliebige Kreise auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem bezogen. Ihre Gleichungen seien

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

$$(x - a')^2 + (y - b')^2 - r'^2 = 0,$$

und der Punkt  $x, y$  auf dem ersten sei so gewählt, dass der nach ihm gezogene Radius mit der Richtung der  $x$ -Axe einen Winkel  $\varphi$  bildet, so dass für seine Coordinaten die Gleichungen gelten:

$$x - a = r \cos \varphi,$$

$$y - b = r \sin \varphi.$$

Der ihm entsprechende Punkt, welchen wir, von jener Anfangslage gemessen, um den Winkel  $\alpha$  voraus-eilen lassen, hat dann die Gleichungen:

$$(x - a') = r' \cos (\varphi + \alpha)$$

$$(y - b') = r' \sin (\varphi + \alpha).$$

Indem wir  $\varphi$  alle Werthe durchlaufen lassen, erhalten wir beide Punktsysteme, aus welchen die Tangentensysteme in der Form:

$$(x - a)r \cos \varphi + (y - b)r \sin \varphi - r^2 = 0$$

und  $(y - a')r' \cos (\varphi + \alpha) + (y - b')r' \sin (\varphi + \alpha) - r'^2 = 0$  folgen.

Die Gleichung der Curve resultirt durch Elimination von  $\varphi$  aus diesen Gleichungen, welche mit Hilfe der Substitutionen:



$$\sin\varphi = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$$

ausgeführt wird. Wir erhalten:

$$0 = (x - a - r) + 2\lambda (y - b) + \lambda^2 (-x + a - r),$$

$$0 = \{(x - a')\cos\alpha + (y - b')\sin\alpha - r'\} + 2\lambda \{(y - b')\cos\alpha - (x - a')\sin\alpha\} + \lambda^2 \{-(x - a')\cos\alpha - (y - b')\sin\alpha - r'\},$$

und die Gleichung der Curve wie früher im allgemeinen Fall in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ A' & B' & C' & 0 \\ 0 & A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0,$$

wo  $A = (x - a - r)$

$B = y - b$

$C = -x + a - r$

$A' = (x - a')\cos\alpha + (y - b')\sin\alpha - r'$

$B' = -(y - b')\cos\alpha - (x - a')\sin\alpha$

$C' = -(x - a')\cos\alpha - (y - b')\sin\alpha - r'$  ist.

Es bleibt nun nur noch übrig, die Uebereinstimmung unserer Curve mit der Kreisconchoide der metrischen Geometrie zu zeigen, um dann alle für die allgemeine Curve gefundenen Sätze auch auf diese übertragen zu können. Hiezu bemerken wir, dass bei Berechnung des Systems der erzeugenden Kegelschnitte nach §. 7, wozu wir nur die obigen Ausdrücke für A etc. einzusetzen brauchen, sich folgende Sätze ergeben:

eb.de

ap.qe ap.qe ap

eb.de eb.de eb

je ap.qe ap.qe ap



Die erzeugenden Kegelschnitte unserer Curve sind Kreise, welche die Curve je in zwei Punkten berühren. Der eine zerfallende Kegelschnitt der Reihe ist das Strahlenbüschel im Doppelpunkt der Curve.

Der Ort der Mittelpunkte der erzeugenden Kreise ist wiederum ein Kreis, welcher durch den Doppelpunkt der Curve geht und über der Centrale der erzeugenden Kreise als Sehne beschrieben den Winkel  $\alpha$  fasst.

Der Winkel zwischen je zwei entsprechenden Tangenten ändert sich mit der Wahl der erzeugenden Kreise. Insbesondere gilt der Satz:

Unsere Curve vierter Ordnung kann auf einfach unendlich viel Weisen durch je zwei Erzeugungskreise dargestellt werden, deren entsprechende Tangenten einen Winkel von  $90^\circ$  einschliessen.

Und ebenso:

Unsere Curve vierter Ordnung kann immer auf eine Weise aus zwei Kreisen mit gleichem Radius konstruirt werden, deren entsprechende Tangenten einen Winkel von  $90^\circ$  einschliessen.

Dieser letzte Satz nun gestattet uns, die Gleichung unserer Curve auf die gewöhnlich gegebene Form zu bringen.

Wir legen das Coordinatensystem so, dass die Axe der  $y$  in die Centrale der beiden Erzeugungskreise mit gleichem Radius zu liegen kommt, während die Axe der  $x$  darauf senkrecht dieselbe halbirt. Dann lauten die Gleichungen für die erzeugenden Kreise:

$$(y - a)^2 + x^2 = r^2$$

$$(y + a)^2 + x^2 = r^2$$

und da wir  $\alpha = 90^\circ$  nehmen, wird



$$\begin{aligned} A &= y - a - r, \\ B &= x, \\ C &= -y + a - r, \\ A' &= x - r, \\ B' &= -y - a, \\ C' &= -x - r, \end{aligned}$$

die Curvengleichung also:

$$2r^2 \left( (a + x)^2 + y^2 \right) - \left( y^2 - a^2 + x^2 \right)^2 = 0.$$

Wir haben für  $y = 0$ ,  $x = -a$  den einen reellen Doppelpunkt, und transformiren wir auf denselben als Coordinatenanfangspunkt, so erhalten wir die Gleichung unserer Curve in der Form:

$$r^2 (x^2 + y^2) - (y^2 + x^2 - 2ax)^2 = 0,$$

während die Kreiskonchoide, deren Leitkreis bei der gewöhnlichen Erzeugung den Radius  $r$  hat, und deren abzutragendes Stück  $a$  ist, die Gleichung hat:

$$a^2 (x^2 + y^2) - (y^2 + x^2 - 2rx)^2 = 0,$$

womit die Identität beider Curven bewiesen ist. Insbesondere sehen wir, dass das abzutragende Stück der metrischen Erzeugung hier gleich dem Radius der erzeugenden Kreise multiplicirt mit  $\sqrt{2}$  ist. Da wir nun aber gefunden haben, dass jede unserer Curven eine Erzeugung durch Kreise mit gleichem Radius und einem Winkel  $\alpha = 90^\circ$  hat, so können wir immer aus der projektivischen Erzeugungsweise die für die metrische nöthigen Stücke (Leitkreis und abzutragendes



Stück) direkt erhalten und ist so der Zusammenhang zwischen beiden Erzeugungsweisen hergestellt.

In Figur 4 haben wir eine solche Curve aus zwei Kreisen mit gleichem Radius konstruirt, deren Tangenten einander so zugeordnet sind, dass sie einen Winkel  $\alpha = 90^\circ$  (siehe p. 58) einschliessen. Wir sehen, der Doppelpunkt liegt auf dem über der Centrale als Durchmesser beschriebenen Kreise, welcher Ort der Mittelpunkt der erzeugenden Kreise ist und Leitkreis der metrischen Erzeugung. Ein Durchmesser desselben gibt in seinen Endpunkten die Mittelpunkte zweier Kreise, welche die Curve mittelst derselben Zuordnung ( $\alpha = 90^\circ$ ) zu erzeugen gestatten. Ihre Radien sind leicht zu berechnen. Eine Sehne von gegebener Länge gibt durch ihre Endpunkte wiederum zwei Kreise an, welche die Curve zu erzeugen gestatten. Die Zuordnung ist dann aber eine solche, dass die entsprechenden Tangenten sich unter einem Winkel  $\alpha$  schneiden, der gleich dem Peripheriewinkel über dieser Sehne ist. Für jeden Winkel  $\alpha$  erhalten wir so eine einfach unendliche Anzahl von Erzeugungen.

Für jedes  $\alpha$  aber ist auch der (in ein Strahlenbündel zerfallende) Kreis im Doppelpunkt zur Erzeugung zu verwenden. Für  $\alpha = 90^\circ$  gehört zu ihm der Kreis, dessen Mittelpunkt der Endpunkt des Durchmessers vom Doppelpunkt aus ist. Dann ist aber die Curve Ort der von einem Punkt ausserhalb eines Kreises auf dessen Tangenten gefällten Lothe, wie schon Sidler l. c. §. 2 gefunden. Für einen anderen Win-



kel  $\alpha$  findet man den zweiten erzeugenden Kreis dadurch, dass man vom Doppelpunkte aus eine Sehne in den Kreis legt, welche zu dem Winkel  $\alpha$  gehört. Ihr anderer Endpunkt ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises und man hat vom Doppelpunkt aus jede seiner Tangenten unter dem Winkel  $\alpha$  zu schneiden.

Zugleich ist in Figur 4 die entsprechende Classenkurve gezeichnet, welche in eine Hyperbel und die doppelt zählende einfach unendlich ferne Gerade zerfällt.

Die Schröter'schen Hilfskegelschnitte für die Ordnungskurve sind, wie auch die Rechnung ergiebt, Parabeln, welche den reellen Doppelpunkt zum gemeinsamen Brennpunkt haben und die entsprechende Classenkurve (in Figur 4 die Hyperbel) umhüllen.

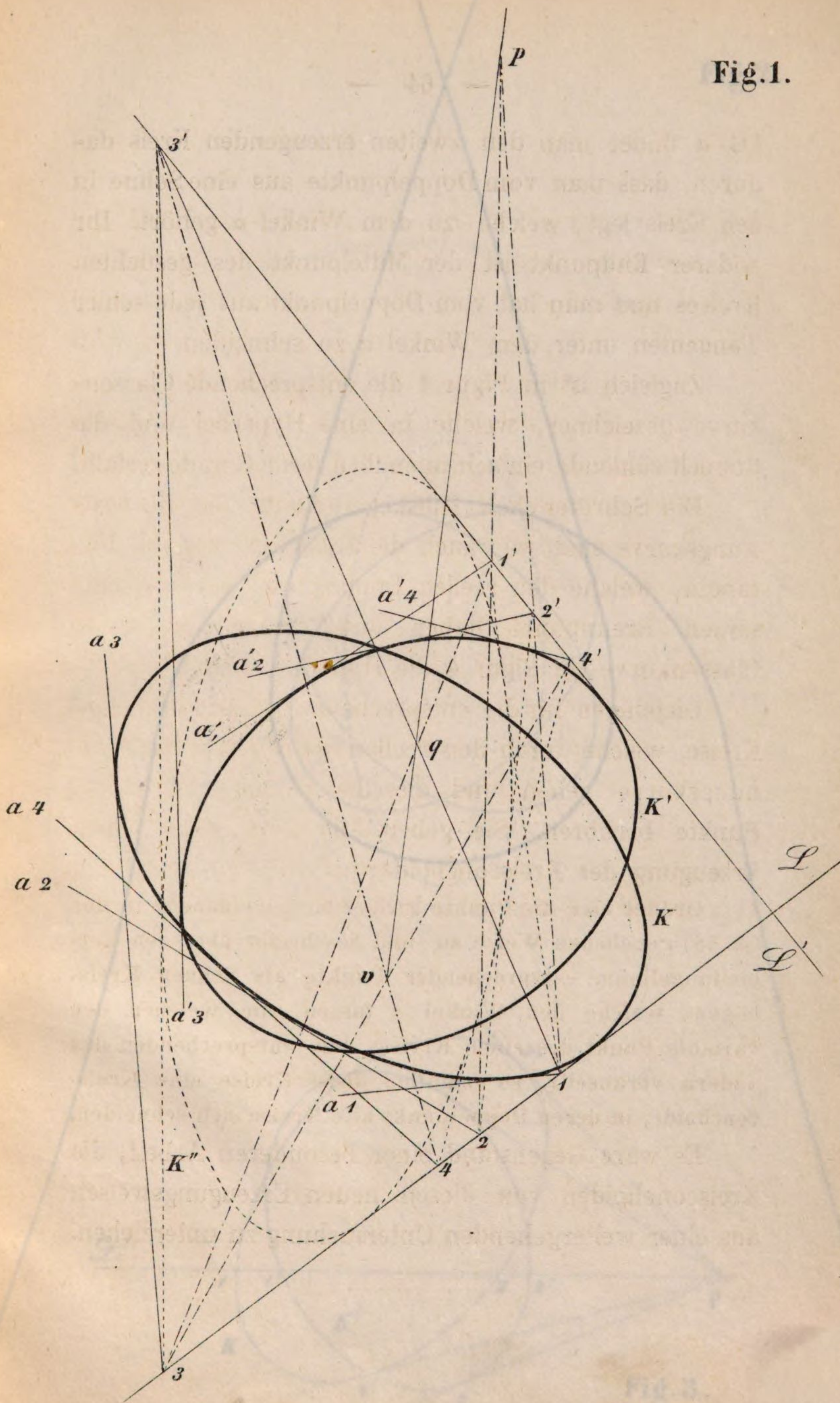
Diejenigen für die entsprechende Classenkurve sind Kreise, welche durch den reellen Doppelpunkt der Ordnungskurve gehen und dieselbe je noch in einem Punkte berühren. Sie geben Anlass zu einer neuen Erzeugung der Kreisconchoide:

Ordnet man die Punkte zweier Kreise einander in der (p. 58) gegebenen Weise zu und beschreibt über den Verbindungslinien entsprechender Punkte als Sehnen Kreisbögen, welche den Winkel  $\alpha$  fassen, um welchen der variable Punkt des einen Kreises dem entsprechenden des andern vorausseilt, so umhüllen diese Kreise eine Kreisconchoide, in deren Doppelpunkt alle Kreise sich schneiden.

Es wäre Gegenstand einer besonderen Arbeit, die Kreisconchoiden von diesen neuen Erzeugungsweisen aus einer weitergehenden Untersuchung zu unterziehen.



Fig.1.





298



Fig. 2.

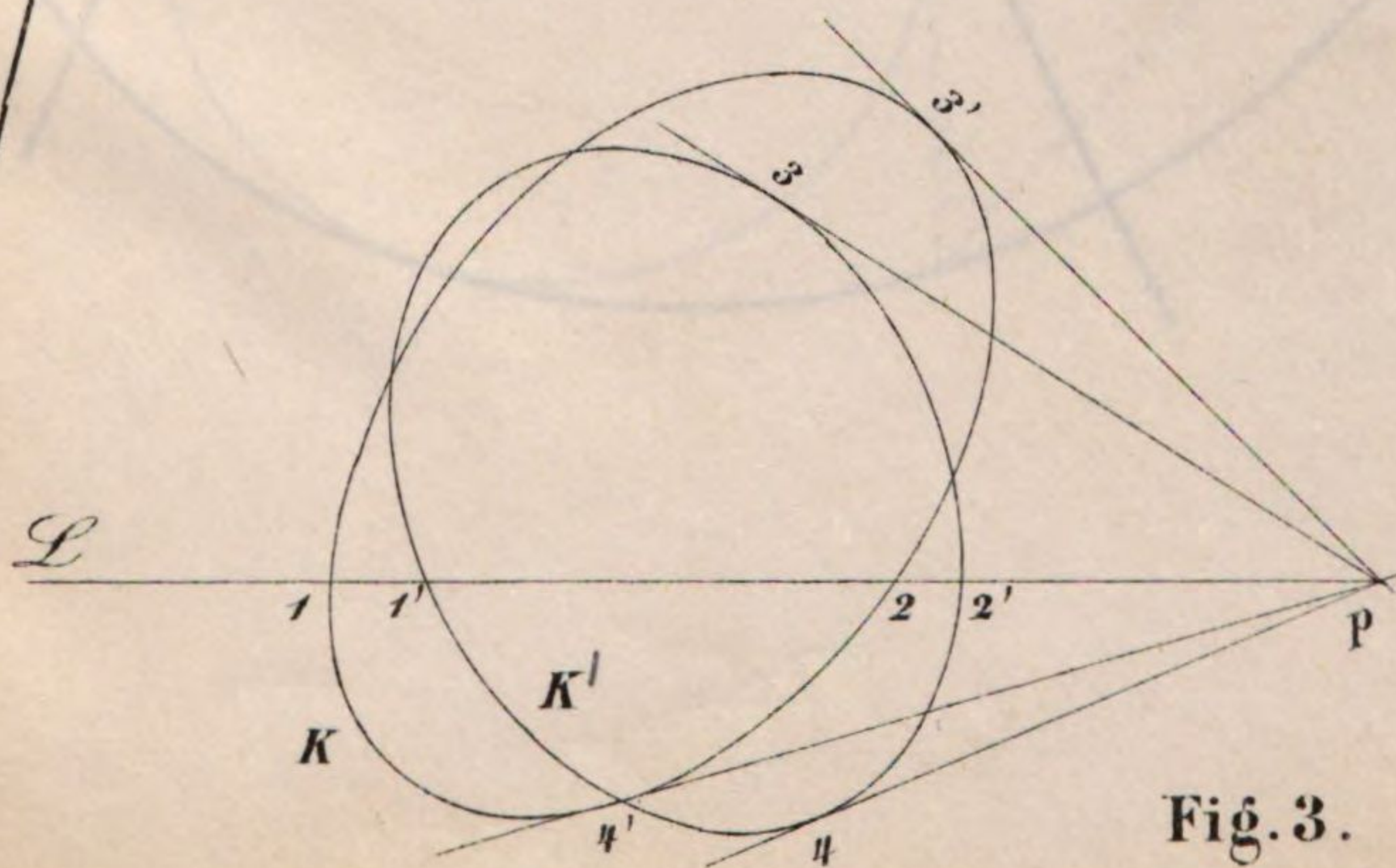
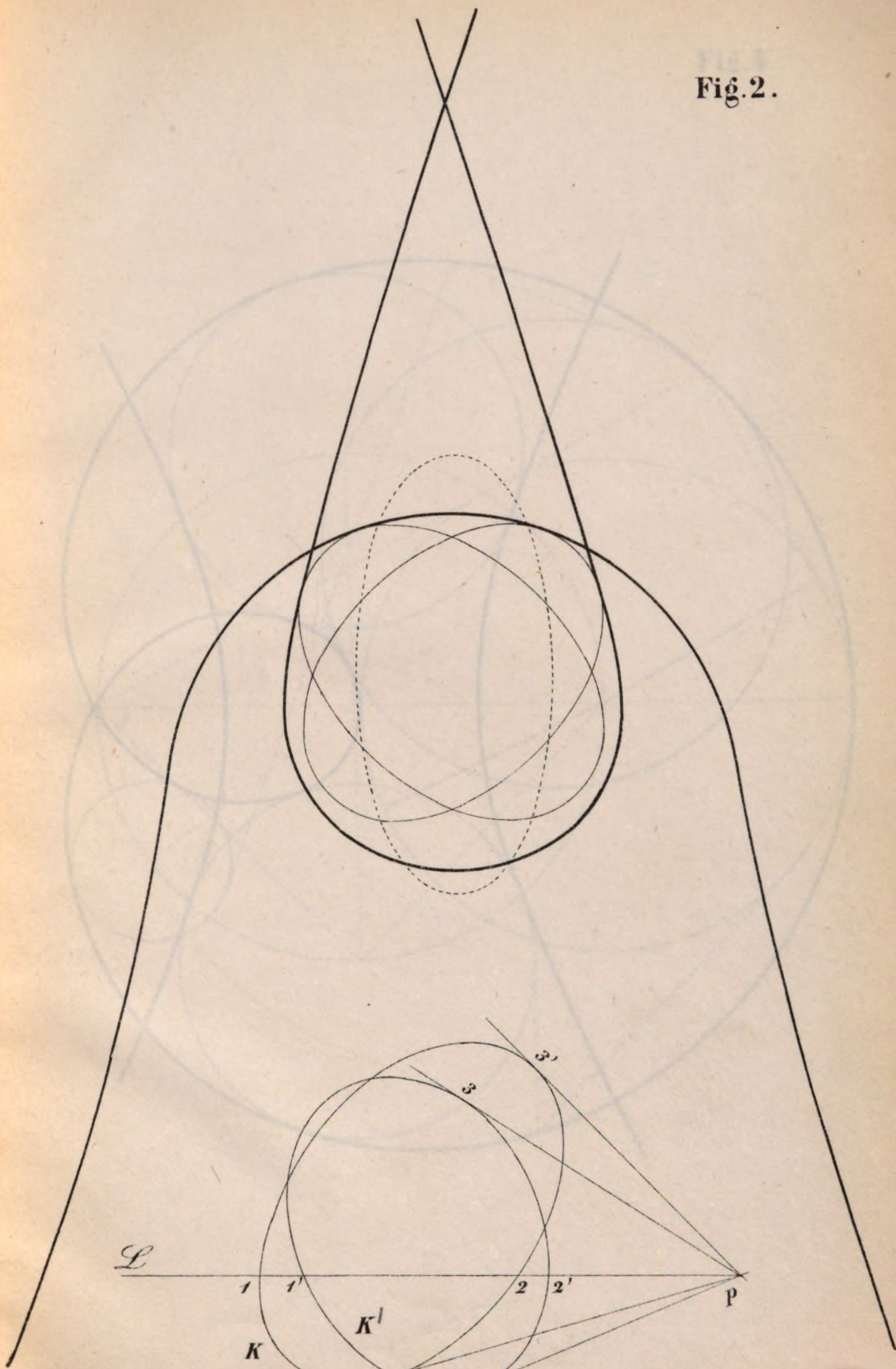


Fig. 3.



Fig. 4.  
Fig. 3.

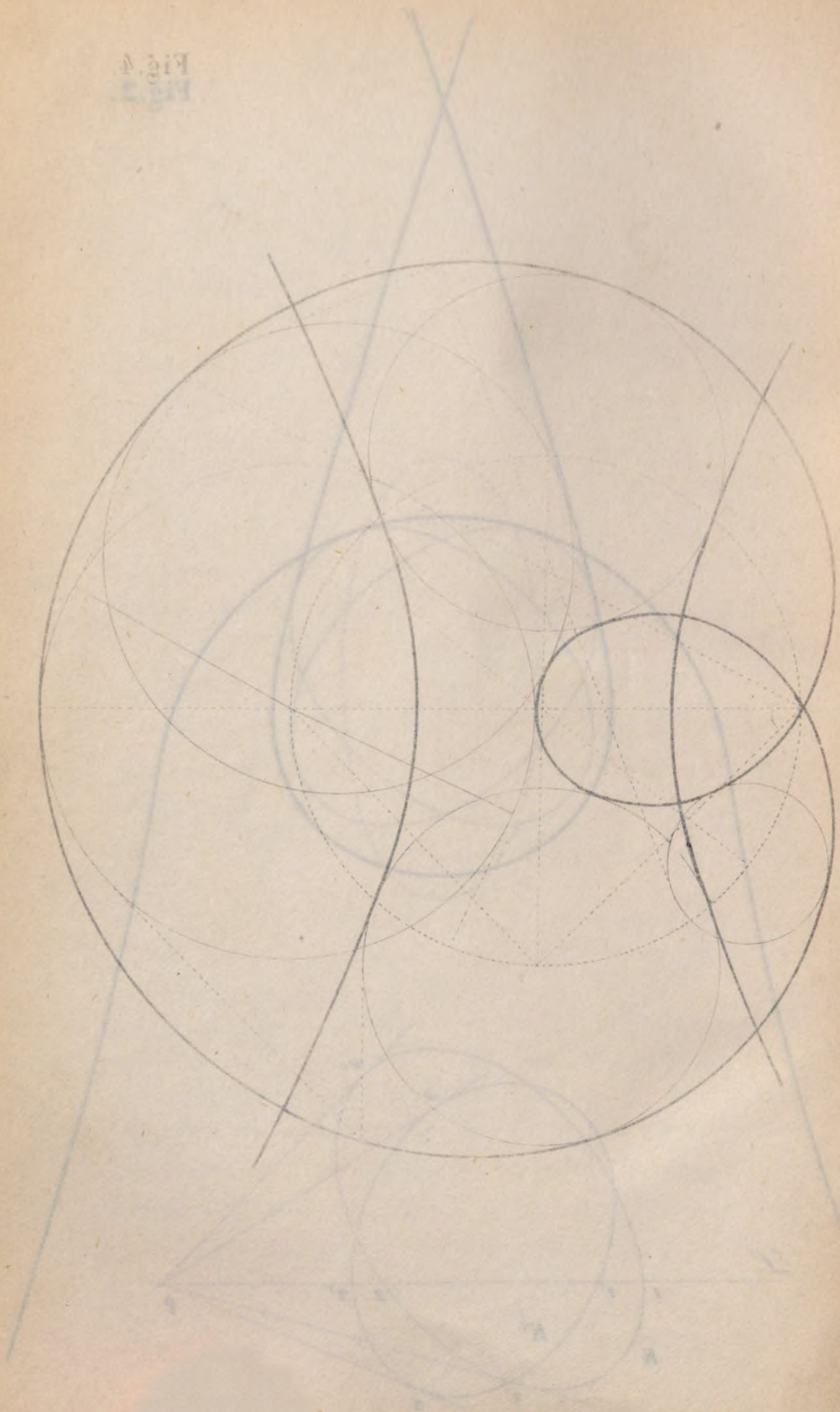
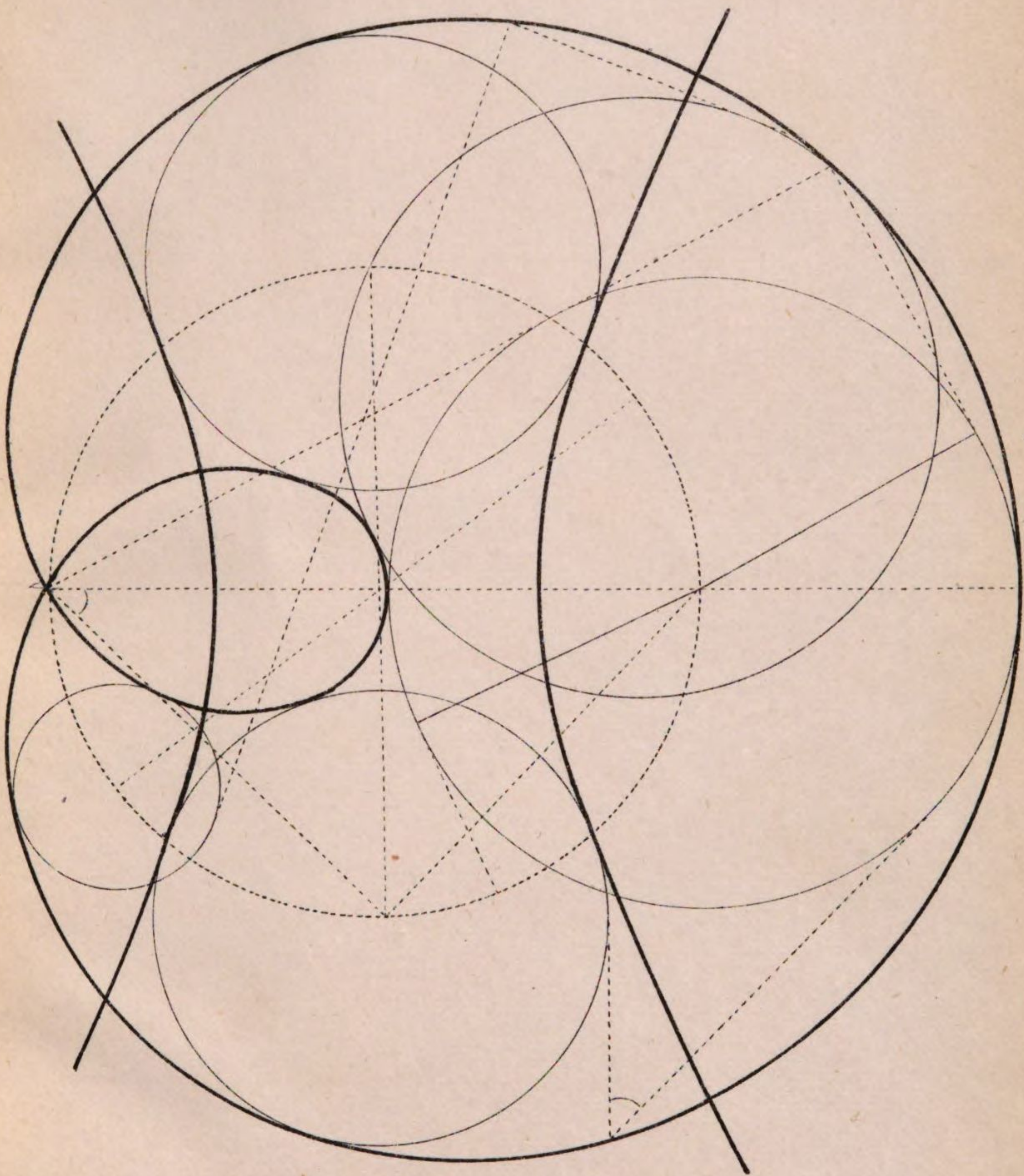


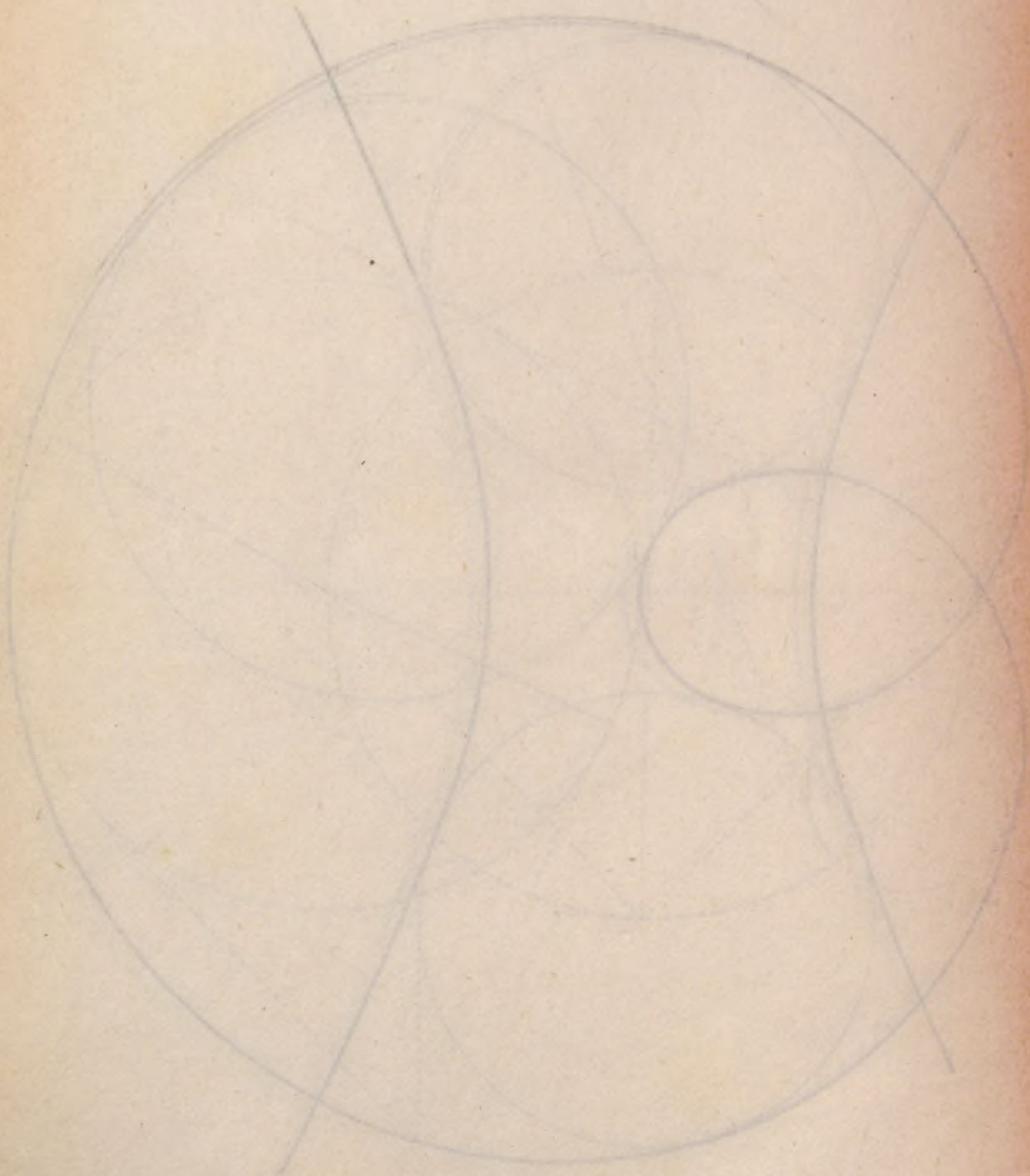


**Fig. 4.**





4-214





















F. X. BEER  
kgl. Hofbuchbinde  
MÜNCHEN  
*Lederergasse 25*















Bretschneider, Wilhelm

Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten

Stuttgart 1875

Math.p. 56 gp

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11318344-1